# 解析学 I に対する追加説明#12

- すこし複雑な有理関数の積分を実行する。

$$\int \frac{2(x^3+4x^2+7x+6)}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}\,dx$$

- $\dfrac{2(x^3+4x^2+7x+6)}{(x+1)^2(x^2+2x+5)} = \dfrac{Ax+B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$ とおいて通分した分子の恒等式を比較する。恒等式は

$$(Ax+B)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x+1)^2 = 2(x^3+4x^2+7x+6) \tag{1}$$

なので式 (1) に $x=-1$ を代入して $-A+B=1$ を得る。式 (1) を微分すると

$$A(x^2+2x+5)+(Ax+B)(2x+2)+g(x)(x+1) = 2(3x^2+8x+7) \tag{2}$$

となる。$g(x)$ の部分は計算できるのだが，この式は次に $x=-1$ を代入することにしか使用しないので，この部分が $x+1$ という因子をもつことだけで十分である。一般に $f(x)$ が多項式のとき $f(x)(x+a)^n$ の導関数は $g(x)(x+a)^{n-1}$ の形をしている。 式 (2) に $x=-1$ を代入すると，$A=1$ を得る。よって $B=2$ である。

$$\begin{aligned}(Cx+D)(x+1)^2 &= 2(x^3+4x^2+7x+6)-(Ax+B)(x^2+2x+5)\\ &= 2(x^3+4x^2+7x+6)-(x+2)(x^2+2x+5) = (x+2)(x+1)^2\end{aligned}$$

より

$$\frac{x+2}{(x+1)^2} + \frac{x+2}{x^2+2x+5}$$

と部分分数展開できる。

- $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ なので $t=x+1$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$ より

$$I_1 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{t+1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{t}{t^2+4}\,dt + \int \frac{1}{t^2+4}\,dt$$

となる。

- 前者の積分は $u = t^2 + 4$ とおくと $\dfrac{du}{dt} = 2t$ より

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \frac{t}{t^2+4}\,dt = \int \frac{t}{u}\frac{1}{2t}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{2}\log|u| = \frac{1}{2}\log|x^2+2x+5| \end{aligned}$$

となる。

- 後者は $t = 2u$ とおくと $\dfrac{dt}{du} = 2$ なので

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{1}{4u^2+4}2\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\arctan u \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

となる。

- よって

$$\begin{aligned} I &= \int \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+2}{x^2+2x+5} \right\} dx \\ &= \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + I_1 \\ &= \log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

となる。