解析学 I に対する追加説明#13

- 分母が実数の範囲で因数分解できない 2 次式のべき乗である有理関数の積分は次の漸化式を使う。

  $J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ とおくと，漸化式

  $$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right\}$$

- しかしこのような式を日常的に暗記しているのはほとんど不可能であろう。そこで，必要になった場合に導けるようにしておくことが望ましい。

- 演習問題 3.2 (6) の問題

  $$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

  を考える。

- 漸化式が分かっているときはそれを適用すればよいだけの問題であるが，ここでは漸化式を憶えていないとする。

- そこで色々な変形を試みて計算するわけだが，ここでは

  $$\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} \tag{1}$$

  という式に着目する。

- $J_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\, dx, J_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$ とおく。

  式 (1) を

  $$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

  と変形して積分すると

  $$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx = \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

  となる。即ち

  $$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx + J_2 = J_1 \tag{2}$$

  となる。

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ の積分を求めるのに，それより難しそうに見える $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$ の積分を求めることになったと考えるかもしれないが，それは間違いである。
- すでに学んでいるが $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ を求めるより $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ を求める方が簡単であった。それと同じ様に実は $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$ の積分の方が $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ より簡単に求めることができる。
- 積分を

$$\int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

と見て部分積分することを考える。そのためには $f'(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ となる関数を見つければよい。もし見つかれば積分は

$$\int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=\int xf'(x)\,dx=xf(x)-\int f(x)\,dx \quad (3)$$

となるからである。
- $f(x)$ を求める。

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

ここで $t=x^2+1$ とおき変数変換すると $\dfrac{dt}{dx}=2x$ より

$$=\int \frac{x}{t^2}\frac{1}{2x}\,dt=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\,dt=-\frac{1}{2}\frac{1}{t}=-\frac{1}{2(x^2+1)}$$

- $f(x)$ が求まったので式 (3) に $f(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned}\int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx&=-x\frac{1}{2(x^2+1)}+\int \frac{1}{2(x^2+1)}\,dx\\&=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}J_1\end{aligned}$$

となる。

- これを式 (2) に代入すると

$$-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}J_1+J_2=J_1$$

となるので

$$J_2=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}J_1$$

を得る。

- $J_1=\arctan x$ なので

$$J_2=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x$$

となる。