

解析学 I に対する追加説明 #14

- 演算子法についての追加説明です。
- 演算子と関数の区別がついていない人が若干 (多数?) いるようである。

D は微分演算子で, 関数 y をその導関数 $\frac{dy}{dx}$ に移す写像である。 $y' = 2y$ という微分方程式は $Dy = 2y$ と書き直し, $Dy - 2y = 0$ と移行し, 2 を 2 倍演算子と考え

$$(D - 2)y = 0$$

と書くことができる。

- 定数倍演算子, 関数倍演算子は演算子とも定数または関数とも見ることができるので, すこし注意が必要かもしれない。

$$(D - 2)y$$

と書いてあったとき 2 は演算子と考えるしかないが,

$$Dy - 2y$$

では 2 は演算子とも考えることができるし, 定数の 2 と考えることもできる。どちらも見方をしても違いはない。

- 関数倍も定数倍と同様で

$$(D - f(x))y$$

の場合 $f(x)$ は関数倍演算子と考えるしかないが,

$$Dy - f(x)y$$

では $f(x)$ は演算子とも考えることができるし, 関数 $f(x)$ と考えることもできる。

- 演算子で微分方程式を解くことはスローガンのには

微分方程式を解く $\xrightarrow{D-\lambda=e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}}$ 積分

といえる。

- 前回とりあげた例

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$$

をもう一度取り上げる。微分演算子 D を用いて

$$(D^2 - 4)y = 0$$

とかく。これを

$$(D - 2)(D + 2)y = 0 \quad (1)$$

と演算子の積の形にする。 $(D + 2)y = u$ とおくと微分方程式 (1) は $(D - 2)u = 0$ となる。すなわち 2 階の微分方程式 (1) は 1 階の 2 つの微分方程式

$$(D - 2)u = 0 \quad (2)$$

$$(D + 2)y = u \quad (3)$$

を解くことに帰着できる。

- 微分方程式 (2) は $D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$ を用いると

$$e^{2x} D e^{-2x} u = 0$$

即ち $v = e^{-2x} u$ とおくと

$$Dv = 0$$

となり, v の積分を求める問題になる。

- $v = C_1$ なので $u = C_1 e^{2x}$ となり微分方程式 (3) は

$$(D + 2)y = C_1 e^{2x}$$

となる。 $D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$ を用いると $e^{-2x} D e^{2x} y = C_1 e^{2x}$ と変形できる。 $z = e^{2x} y$ とおくと, この微分方程式は

$$Dz = C_1 e^{4x}$$

となり, z の積分を求める問題になる。