解析学 I に対する追加説明#15

微分方程式は解くのは難しくても，解が正しいかをチェックすることは容易である。**必ずチェックすること。**

- 例えば微分方程式

$$(D^2 - D - 6)y = 0 \tag{1}$$

の解を求める。

- $(D^2 - D - 6) = (D - 3)(D + 2)$ であるが，間違って

$$D^2 - D - 6 = (D - 3)(D - 2)$$

と変形してしまったとする。

このまま計算をすると解関数として

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} \tag{2}$$

が得られる。

- この間違いは得られた解関数 (2) を元の微分方程式 (1) に代入してみると気付くであろう。

元の微分方程式 (1) は

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

であるが，これに得られた解関数 (2) を代入する。

$$Dy = 3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x}$$
$$D^2y = 9C_1e^{3x} + 4C_2e^{2x}$$

なので

$$\begin{aligned}(D^2 - D - 6)y &= D^2y - Dy - 6y \\ &= \left(9C_1e^{3x} + 4C_2e^{2x}\right) - \left(3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x}\right) - 6\left(C_1e^{3x} + C_2e^{2x}\right) \\ &= 0C_1e^{3x} - 4C_2e^{2x} = -4C_2e^{2x}\end{aligned}$$

となる。(2) が正しい解であれば 0 になるはずだが $-4C_2e^{2x} = 0$ ではない。よって解 (2) は正しい解でないこと，即ち途中で何か間違いをしたことが分かる。

- 間違えずに解くと解関数として

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} \tag{3}$$

を得る。

- これが正しいかどうかをチェックするには (3) を元の微分方程式 (1) に代入する。

$$\begin{aligned} Dy &= 3C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-2x} \\ D^2 y &= 9C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} (D^2 - D - 6)y &= D^2 y - Dy - 6y \\ &= \left(9C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-2x}\right) - \left(3C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-2x}\right) - 6\left(C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}\right) \\ &= (9 - 3 - 6)C_1 e^{3x} + (4 + 2 - 6)C_2 e^{-2x} = 0 \end{aligned}$$

よって解関数 (3) は正しい解であることが分かる。

- この講義では微分方程式を演算子法で解いたが，別の方法で解いてもかまわない。(特に再履修の人の中には別の解き方を学んでいる人もいるであろう。)

ただし，何か別の定理を前提にして解くのは正しい解答とはいえない。

- 例えば演習問題 3.14 を用いる様な次の解答は 0 点とはいえないが，満点では勿論ない。(20 点満点で 5 点ぐらいか？)

- 微分方程式

$$(D^2 - 4)y = 0 \tag{4}$$

を解く。$t^2 - 4 = 0$ の解は $t = \pm 2$ である。よって演習問題 3.14 より

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \tag{5}$$

が解である。

- 自分は (5) が解であることを知っているので，そのことはどうしても使いたいという人は次のようにすれば，正しい解答になる。

- 最初に (5) が解であることを確認する。

$$Dy = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x}$$
$$D^2y = 4C_1e^{2x} + 4C_2e^{-2x}$$

より

$$\begin{aligned}(D^2-4)y &= D^2y - 4y \\ &= \left(4C_1e^{2x} + 4C_2e^{-2x}\right) - 4\left(C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}\right) \\ &= (4-4)C_1e^{2x} + (4-4)C_2e^{-2x} = 0\end{aligned}$$

よって (5) は微分方程式 (4) の解である。これが解答の半分である。

- 残りの半分は微分方程式 (4) の解がすべて (5) の形をしていることを示すことである。これには定理 3.9 を必要とする。定理 3.9 は一般の n 階の微分方程式について述べたものだが，これを我々のケースに限定して書くと次になる。

- 微分方程式

$$y'' = py' + qy \tag{6}$$

に対し定数 a, b を指定したとき，

$$y(0) = a, y'(0) = b$$

を満たす (6) の解が唯一つ存在する。

- 前項の定理を用いて，微分方程式 (4) の解がすべて (5) の形をしていることを示す。

y を微分方程式 (4) の任意の解とする。$y(0) = a, y'(0) = b$ とおく。

$$y_1 = \frac{2a+b}{4}e^{2x} + \frac{2a-b}{4}e^{-2x}$$

とおくと，y_1 は微分方程式 (4) の解であり，

$$y_1(0) = a, \qquad y_1'(0) = b$$

となる。

前項の定理より $y = y_1$ でなければならない。よって微分方程式 (4) の解は (5) の形をしている。