解析学Iに対する追加説明#16

積分は解くのは難しくても，解が正しいかをチェックすることは容易である。**必ずチェックすること。**

- 有理関数の積分，ここでは

$$I = \int \frac{x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 13x + 10}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}\, dx$$

を考える。

- 最初に部分分数に展開する。
$g(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 13x + 10, f(x) = (x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)$
とおく。

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_1(x)}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{A}{x + 1}$$

と部分分数展開できるので，

$$g(x) = g_1(x)(x + 1) + A(x^2 + 2x + 3)^2$$

が成立している。この式に $x = -1$ を代入する。

$$4 = g(-1) = g_1(-1)(-1 + 1) + A\big((-1)^2 + 2(-1) + 3\big)^2 = 4A$$

より $A = 1$ である

$$\begin{aligned}\frac{g_1(x)}{(x^2 + 2x + 3)^2} &= \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{1}{x + 1} = \frac{g(x) - (x^2 + 2x + 3)^2}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} \\ &= \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^2}\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 13x + 10}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{1}{x + 1}$$

と部分分数展開できる。

- 部分分数に展開したものが正しいかを確かめるため検算を必ずする事。通分してもとの関数になればよい。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{1}{x+1} &= \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}+\frac{(x^2+2x+3)^2}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}\\
&= \frac{x+1+x^4+4x^3+10x^2+12x+9}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}\\
&= \frac{x^4+4x^3+10x^2+13x+10}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}
\end{aligned}
$$

- 積分を実行する。

$$
I_1=\int\frac{1}{x+1}\,dx,\qquad I_2=\int\frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
I &= \int\frac{x^4+4x^3+10x^2+13x+10}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\right)dx\\
&= \int\frac{1}{x+1}\,dx+\int\frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=I_1+I_2
\end{aligned}
$$

となる。

$$
I_1=\int\frac{1}{x+1}\,dx=\log|x+1|
$$

である。

- I_2 は分母が (実数の範囲で) 因数分解できない 2 次式 (の 2 乗) なので 1 次の項を 0 に直す。

$$
x^2+2x+3=x^2+2x\cdot 1+1^2-1^2+3=(x+1)^2+2
$$

なので $t=x+1$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$ より

$$
I_2=\int\frac{1}{\left((x+1)^2+2\right)^2}\,dx=\int\frac{1}{\left(t^2+2\right)^2}\,dt
$$

この積分は漸化式で解ける。漸化式は記憶しているはずはないので導こう。

- $J_2 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx, J_1 = \int \frac{1}{x^2+2}\,dx$ とおくとき

$$J_2 = \frac{1}{4}J_1 + \frac{x}{4(x^2+2)}$$

が成立する。これを証明する。

$$\frac{1}{x^2+2} = \frac{x^2+2}{(x^2+2)^2} = \frac{x^2}{(x^2+2)^2} + \frac{2}{(x^2+2)^2}$$

の両辺を積分すると

$$J_1 = \int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx + 2J_2$$

である。$K = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx$ とおく。

- K を求めるため，$\dfrac{x^2}{(x^2+2)^2} = x\dfrac{x}{(x^2+2)^2}$ と見て部分積分を実行する。$F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$ が求まれば，$F'(x) = \dfrac{x}{(x^2+2)^2}$ なので

$$K = \int xF'(x)\,dx = xF(x) - \int F(x)\,dx$$

となる。

$u = x^2+2$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 2x$ より

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{x}{u^2}\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du \\ &= -\frac{1}{2u} = -\frac{1}{2(x^2+2)} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} K &= xF(x) - \int F(x)\,dx \\ &= -\frac{x}{2(x^2+2)} - \int \left(-\frac{1}{2(x^2+2)}\right)\,dx \\ &= -\frac{x}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+2)}\,dx = -\frac{x}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2}J_1 \end{aligned}$$

- よって
$$J_1 = -\frac{x}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2}J_1 + 2J_2$$
となり
$$J_2 = \frac{1}{4}J_1 + \frac{x}{4(x^2+2)}$$
を得る。

- よって $K_1 = \displaystyle\int \frac{1}{t^2+2}\,dt$ とおくと
$$I_2 = \frac{1}{4}K_1 + \frac{t}{4(t^2+2)}$$
が成立している。

- K_1 を
$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$
に帰着する。$t = \sqrt{2}u$ とおくと $\dfrac{dt}{du} = \sqrt{2}, t^2 = 2u^2$ より
$$\begin{aligned} K_1 &= \int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \int \frac{1}{2u^2+2}\sqrt{2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan u = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- $t = x+1$ なので
$$I_2 = \frac{1}{4}K_1 + \frac{t}{4(t^2+2)} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}$$
よって
$$I = \log|x+1| + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}$$