解析学Iに対する追加説明#17

微分方程式は解くのは難しくても，解が正しいかをチェックすることは容易である。**必ずチェックすること。**

- 最初に同次型の微分方程式を考える。

$$(D^2 + 2D + 3)y = 0 \tag{1}$$

この微分方程式 (1) は実数値関数の範囲で考えるか，複素数値関数の範囲で考えるか 2 通り考えられる。最初は複素数値関数の範囲で考える。

- $t^2 + 2t + 3 = 0$ の解は

$$\alpha = -1 + i\sqrt{2}, \qquad \beta = -1 - i\sqrt{2}$$

の 2 つなので

$$t^2 + 2t + 3 = (t - \alpha)(t - \beta)$$

と因数分解できる。定数と微分演算子 D が可換なことに注意すれば，このことより演算子が

$$D^2 + 2D + 3 = (D - \alpha)(D - \beta)$$

と分解できる。

- 微分方程式 (1) は

$$(D - \alpha)(D - \beta)y = 0$$

となるので

$$u = (D - \beta)y \tag{2}$$

とおくと

$$(D - \alpha)u = 0 \tag{3}$$

となる。

- 演算子の間の関係式

$$D-\lambda=e^{\lambda x}De^{-\lambda x} \tag{4}$$

を用いて微分方程式 (3) を変形すると

$$e^{\alpha x}De^{-\alpha x}u=0 \tag{5}$$

となる。

- $v=e^{-\alpha x}u$ とおき，微分方程式の両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると

$$Dv=0 \tag{6}$$

となる。(6) を積分すると

$$v=C_1$$

となり，よって

$$u=ve^{\alpha x}=C_1e^{\alpha x} \tag{7}$$

が得られる。

- (7) を (2) に代入すると微分方程式

$$(D-\beta)y=C_1e^{\alpha x} \tag{8}$$

が得られ，これを解けば y が求まる。

- 微分方程式 (8) を関係式 (4) を用いて変形すると

$$e^{\beta x}De^{-\beta x}y=C_1e^{\alpha x}$$

となる。$z=e^{-\beta x}y$ とおき，両辺に $e^{-\beta x}$ をかけると

$$Dz=C_1e^{(\alpha-\beta)x}$$

となる。これを積分すると

$$z=\frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x}+C_2 \tag{9}$$

となる。ここで $\alpha-\beta=2\sqrt{2}i\neq0$ であることを注意しておく。

- $\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}$ を C_1 でおき直すと

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \tag{10}$$

が得られる。

- (10) は微分方程式 (1) の一般解であるが，一般に複素数値関数である。これを実数値関数の形に書き換えたい。そこでオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{11}$$

を用いる。

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &= e^{(-1+i\sqrt{2})x} = e^{-x} e^{i\sqrt{2}x} \\ &= e^{-x}\left(\cos\sqrt{2}x + i\sin\sqrt{2}x\right) \\ e^{\beta x} &= e^{(-1-i\sqrt{2})x} = e^{-x} e^{-i\sqrt{2}x} \\ &= e^{-x}\left(\cos\sqrt{2}x - i\sin\sqrt{2}x\right) \end{aligned}$$

より (10) は

$$\begin{aligned} &y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \\ &\quad = C_1 e^{-x}\left(\cos\sqrt{2}x + i\sin\sqrt{2}x\right) + C_2 e^{-x}\left(\cos\sqrt{2}x - i\sin\sqrt{2}x\right) \\ &\quad = \left(C_1 + C_2\right) e^{-x}\cos\sqrt{2}x + \left(iC_1 - iC_2\right) e^{-x}\sin\sqrt{2}x \end{aligned}$$

と書ける。$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 e^{-x}\cos\sqrt{2}x + A_2 e^{-x}\sin\sqrt{2}x \tag{12}$$

が得られる。

- 次に非同次型の微分方程式

$$(D^2 + 2D + 3)y = x^3 \tag{13}$$

を考える。

- ここで

「(13) の一般解」=「(13) の特殊解」+「(1) の一般解」

という定理を用いる。(1) の一般解は複素数値関数としての表現でよければ，(10) の形をしており，実数値関数の表現としては (12) の形をしている。ここでは実数値関数として (13) の一般解を求めよう。

- (1) の一般解は (12) で求められているので，(13) の特殊解を求める。特殊解として
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{14}$$
の形のものがあるとして a, b, c, d を決定しよう。

- (14) が微分方程式 (13) の解であるとするとする。
$$\begin{aligned} Dy &= 3ax^2 + 2bx + c \\ D^2y &= 6ax + 2b \end{aligned}$$
より
$$\begin{aligned} (D^2 + 2D + 3)y &= D^2y + 2Dy + 3y \\ &= 6ax + 2b + 2\left(3ax^2 + 2bx + c\right) + 3\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) \\ &= 3ax^3 + (6a + 3b)x^2 + (6a + 4b + 3c)x + (2b + 2c + 3d) \end{aligned}$$
となる。これが x^3 になるためには
$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{2}{3}, \quad c = \frac{2}{9}, \quad d = \frac{8}{27}$$
であればよい。逆に
$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{8}{27} \tag{15}$$
は (13) の解になる。

- 以上により微分方程式 (13) の一般解は
$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{8}{27} + A_1e^{-x}\cos\sqrt{2}x + A_2e^{-x}\sin\sqrt{2}x$$
である。