解析学 I 要綱 #11

3.3　諸計算 II(置換積分)

この節では更に進んだ置換積分を扱う。今まで出てきた置換積分は被積分関数を見るとある程度変数の置き方が想定できた。ここで扱う置換積分は予め学んでいなければ分からないような置換積分である。

$\boxed{1}$ **3 角関数の有理関数**

3 角関数の有理関数とは，$R(s,t)$ を s,t に関する有理関数とすると $R(\sin x, \cos x)$ の形をしている関数のことである。この形の関数の積分は $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと有理関数の積分になることが知られている。即ち次が成立する。

命題 3.5 $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

演習問題 3.3　命題 3.5 を証明せよ。

$I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx$ は $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置く。

$$\frac{dt}{dx} = \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\cos^2\dfrac{x}{2} + \sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+t^2)$$

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = \frac{\sin 2\dfrac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2} + \sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \log|t| = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

となる。

この方法は**万能であるが最善の方法とは限らない**。例えば，$\tan x$ で表されるときは $t=\tan x$ と置く方が一般に簡単になる。

$I=\displaystyle\int(\tan x)^2\,dx$ の場合 $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置いても出来るが，計算は少し面倒である。

$t=\tan x$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{(\cos x)^2}=1+(\tan x)^2=1+t^2$ なので

$$\begin{aligned}I&=\int t^2\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt=\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}\,dt\\&=t-\arctan t=\tan x-x\end{aligned}$$

となる。

一方 $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}I&=\int\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{8t^2}{(1-t)^2(1+t)^2(1+t^2)}\,dt\\&=\int\left\{\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{2}{1+t^2}\right\}dt\\&=-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}-2\arctan t\\&=-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}-1}-2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。

このように三角関数の積分の場合，ここで紹介した方法は最後の手段と考え，他の方法で試みてできないときに適用すると考えた方がよいであろう。例えば被積分関数が三角関数の積の形のとき「積を和に直す公式」が使える。

例として $\cos^2 x$ の積分を考える。この場合「積を和に直す」式は倍角公式から得られる。

$$\begin{aligned}\cos 2x&=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)\\&=2\cos^2 x-1\quad\text{より}\\\cos^2 x&=\frac{\cos 2x+1}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int\cos^2 x\,dx&=\int\frac{\cos 2x+1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{2}\int dx\\&=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x\end{aligned}$$

演習問題 3.4　次の関数の不定積分を求めよ。

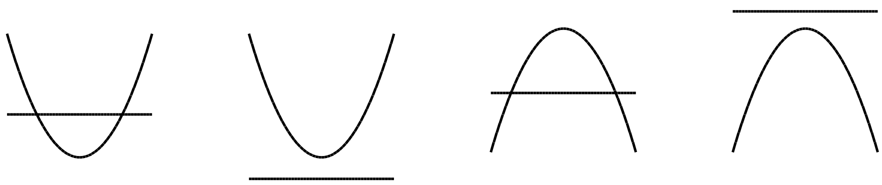
(1) $\sin x \cos x$　(2) $\sin^3 x$　(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$　(5) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(6) $\dfrac{1}{\sin x - \cos x}$

$\boxed{2}$ ルートの中の 2 次式 (1)—3 角関数

$\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ の形の積分，ただし，ここで $R(s,t)$ は s と t の有理関数。2 通りの方法で計算をする。最初は 3 角関数を用いて変換するものを紹介し，次に無理式を用いるものを紹介する。

3 角関数を用いる変換の場合 2 次式は一次式を用いて変数変換しておく。変数変換すると，次のいずれかにできる。



x^2-a^2　x^2+a^2　$-x^2+a^2$　$-x^2-a^2$

最後の $-x^2-a^2$ は常に負なのでこの場合はおこらない。また $a=0$ のときは $\sqrt{x^2}=x$ ($x \geq 0$ と仮定して) となる。よって $a>0$ を仮定する。

例えば x^2+x+1 の場合は

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2+2x\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

となるので $t=x+\dfrac{1}{2}$ と変数変換すると $t^2+\dfrac{3}{4}$ となる。

よってあらかじめ $a^2-x^2, x^2+a^2, x^2-a^2$ のいずれかの形に変形されているものとする。

$\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$ 等であるが煩雑さを避けるため，以下では $\sin x$, $\cos x, \tan x$ は 0 以上であることを仮定する。

(1) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

$x=a\sin t$ と置くと，$\dfrac{dx}{dt}=a\cos t$，$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=$

$\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$ より

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx = \int R\left(a\sin t, a\cos t\right) a\cos t dt$$

(2) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx$

$x = a\tan t$ と置くと，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a}{\cos^2 t}$，$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t + a^2} =$ $\sqrt{a^2(\tan^2 t+1)} = \sqrt{\dfrac{a^2}{\cos^2 t}} = \dfrac{a}{\cos t}$ より

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx = \int R\left(a\tan t, \frac{a}{\cos t}\right) \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

(3) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$

$x = \dfrac{a}{\sin t}$ と置くと，$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}$，$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} =$ $\sqrt{\dfrac{a^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}} = \sqrt{\dfrac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \dfrac{a\cos t}{\sin t}$ より

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx = -\int R\left(\frac{a}{\sin t}, \frac{a\cos t}{\sin t}\right) \frac{a\cos t}{\sin^2 t} dt$$

いずれの場合も 3 角関数の有理関数に帰着できる。

例 3.6 例を考える。
(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ を求める。(2) より $x = \tan t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} =$ $\dfrac{1}{\cos^2 t}$ である。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

を用いて変数変換を実行すると

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt$$

と変形でき，三角関数の有理関数の積分になる。この積分を求めるために「$\boxed{1}$3 角関数の有理関数」で扱った変数変換を実行する。

$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ とおくと，$\frac{du}{dt} = \frac{1+u^2}{2}$，$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos t}\,dt &= \int \frac{1+u^2}{1-u^2}\frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{2}{1-u^2}\,du \\ &= \int \left\{\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right\} du = \log|1+u| - \log|1-u| \\ &= \log\left|1+\tan\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)\right| - \log\left|1-\tan\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)\right|\end{aligned}$$

となる。

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}\,dx$ を求める。(3) より $x = \frac{\sqrt{2}}{\sin t}$ とおくと $\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t}$ である。

$$x^2 - 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sin t}\right)^2 - 2 = \frac{2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t} = \frac{2\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

を用いて変数変換を実行すると

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}\,dx = \int \frac{\sin t}{\sqrt{2}\cos t}\left(-\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t}\right) dt = -\int \frac{1}{\sin t}\,dt$$

と変形できる。$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ とおくと $\frac{du}{dt} = \frac{1+u^2}{2}$，$\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$ より

$$\begin{aligned}-\int \frac{1}{\sin t}\,dt &= -\int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}\,du = -\int \frac{1}{u}\,du \\ &= -\log|u| = -\log\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right|\end{aligned}$$

となる。

演習問題 3.5　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$　(2) $\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$　(3) $\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$　(5) $\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{3}$ **ルートの中の 2 次式 (2)—無理関数**

ルートの中に 2 次式がある場合の積分 $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ を求める 2 番目の方法として，無理式を用いる方法を紹介する。

(1) $a > 0$ の場合

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ と置く。両辺を 2 乗すると

$$ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2$$
$$(b+2\sqrt{a}t)x = t^2 - c$$

より $x = \dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$ となる。これを微分すると

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}$ である。$t-\sqrt{a}x$ に上の x の式を代入すると

$$t-\sqrt{a}x = t - \frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{2\sqrt{a}t+b} = \frac{t(2\sqrt{a}t+b)}{2\sqrt{a}t+b} - \frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{2\sqrt{a}t+b}$$
$$= \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c}{2\sqrt{a}t+b}$$

となるので

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$
$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c}{2\sqrt{a}t+b}\right) \frac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2} dt$$

(2) $ax^2+bx+c = 0$ が 2 解 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ を持つとき。$a > 0$ の場合もできるがここでは $a < 0$ とする [1]。$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ となる。$t = \sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ または同じことだが $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ と置く。両辺を 2 乗すると

$$t^2 = \frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}$$

となるがこれを x について解くと $x = \dfrac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a}$ が得られる。

---

[1] $a > 0$ のときは (1)$x-\alpha > 0$ かつ $x-\beta > 0$ と (2)$x-\alpha < 0$ かつ $x-\beta < 0$ の 2 つの場合がある。後者の場合は符号が変わるが同様に計算できる。

これを微分すると $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}$ である。

$$\begin{aligned} x-\alpha &= \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a} - \alpha = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a} - \frac{\alpha(t^2-a)}{t^2-a} \\ &= \frac{a(\alpha-\beta)}{t^2-a} \qquad \text{より} \end{aligned}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha) = \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}$$

$$\begin{aligned} &\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \\ &\quad = \int R\left(\frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a}, \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}\right) \frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2} dt \end{aligned}$$

を得る。

例 3.7 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ を求める。この問題は (1) の方法も，(2) の方法も適用可能である。両方の方法で計算する。最初は (1) の方法で。

$\sqrt{x^2-1} = t-x$ とおく。両辺を 2 乗すると $x^2-1 = t^2-2tx+x^2$ となるが，これを x について解くと

$$x = \frac{t^2+1}{2t}$$

となる。x を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2-1}{2t^2}$$

となる。

$$t-x = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t}$$

なので変数変換を行う。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \int \frac{2t}{t^2-1}\frac{t^2-1}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt \\ &= \log|t| = \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| \end{aligned}$$

次に (2) の方法で積分を求める。$x^2-1 = (x+1)(x-1)$ なので $\sqrt{x^2-1} = t(x+1)$ とおく。両辺を 2 乗すると $x^2-1 = t^2(x+1)^2$ となり両辺を $x+1$ で割ると $x-1 = t^2(x+1)$ となり，

$$t^2 = \frac{x-1}{x+1}$$

が得られる。両辺を x で微分すると

$$2t\frac{dt}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

となるので変数変換を実行する。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{t(x+1)}t(x+1)^2\,dt = \int (x+1)\,dt$$

$x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ より $x+1 = \dfrac{2}{1-t^2}$ となるので

$$\begin{aligned} &= \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\,dt \\ &= \log\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \log\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| \end{aligned}$$

演習問題 3.6　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(3) $\sqrt{x^2+2}$

(4) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

すでにいくつか例がでてきているが，方法の違いで積分結果が一見違うように見えるときもある。例えば，

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

を考える。3 角関数で置換すると，$x = \dfrac{1}{\sin t}$ より $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$ となる。

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1} &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{\sin t} \\ I_1 &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \sin t\frac{\sin t}{\cos t}\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\,dt \\ &= -\int dt = -t = -\arcsin\frac{1}{x} \end{aligned}$$

となる。無理式を用いると，$\sqrt{x^2-1} = t - x$ より，2 乗すると $x^2-1 = t^2-2tx+x^2$ となる。よって

$$x = \frac{t^2+1}{2t}$$

である。微分すると $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2-1}{2t^2}$ であり,

$$\sqrt{x^2-1} = t - x = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{2t^2}{2t} - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{2t}{t^2+1}\frac{2t}{t^2-1}\frac{t^2-1}{2t^2}\,dt \\ &= 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\arctan t = 2\arctan(x+\sqrt{x^2-1}) \end{aligned}$$

となる。見かけは違うが,実は $x \geq 1$ では $I_2 = \pi + I_1$ となっている。

演習問題 3.7　$x \geq 1$ のとき $I_2 = \pi + I_1$ を示せ。

演習問題 3.8　今までは学んだことに対応する演習問題で,演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚 (?) を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない (?)。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$	(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$	(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$
(4) $x\arcsin x$	(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$	(6) xe^{-x}
(7) $x\cos x$	(8) $x^2\sin x$	(9) e^{3x+1}
(10) $2x\arctan x$	(11) $\log(2x+1)$	(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$
(13) $x^2\log x$	(14) xe^{2x^2+3}	(15) $\dfrac{e^x}{x} + e^x\log x$
(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$	(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$	(18) $\cos^n x\sin x$
(19) $(ax^2+bx+c)e^x$	(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$	(21) $\sin(\log x)$
(22) x^3e^x	(23) x^4e^x	(24) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$
(25) $\dfrac{1}{1+x^2}$	(26) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$	(27) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
(28) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$	(29) $\dfrac{1}{\sin x\cos^5 x}$	(30) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$
(31) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$	(32) $\dfrac{1}{3+\cos x}$	(33) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$
(34) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$	(35) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(36) $\sqrt{x^2-1}$

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ (38) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ (39) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(40) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$ (41) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ (42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(43) $\dfrac{1}{4+x^2}$ (44) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ (45) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(46) $3x^2e^{x^3+1}$ (47) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$ (48) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(49) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$ (50) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$ (51) $\dfrac{3}{x^3-1}$

(52) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$ (53) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$ (54) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

(55) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ (56) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ (57) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

(58) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$ (59) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ (60) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$

(61) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$ (62) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (63) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$

(64) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ (65) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$ (66) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$

(67) $\dfrac{12}{x^3-8}$ (68) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ (69) $\sin 4x$

(70) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$ (71) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$ (72) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$

(73) $\log(1+\sqrt{x})$ (74) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ (75) $3x^2(x^3+5)^6$

(76) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$ (77) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (78) $e^{ax}\cos bx$

(79) $e^{ax}\sin bx$