

演習問題 \*\*1.7 定理 1.9, 1.10, 1.11 を証明せよ。

最初に最大値定理 (定理 1.9) を証明する。そのために「閉区間で定義された連続関数は上に有界である。」ことを証明する。

区間  $I$  で定義された関数  $f$  が上に有界であるとは「 $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in I \ f(x) \leq M$ 」を満たすことである。関数  $f$  は閉区間  $I = [a, b]$  で連続とする。結論を否定し、 $f$  は  $I$  で有界ではないとする。このとき

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x \in I \quad f(x) > M$$

が成立する。特に  $M$  として自然数  $n$  をとると、 $n$  に対しある実数  $x_n \in I$  が存在して  $f(x_n) > n$  が成立する。

ここで「数列  $\{x_n\}$  の部分列  $\{x_{\alpha(n)}\}$  で収束するものが存在する」ことを示す。ここで  $\alpha$  は自然数  $\mathbb{N}$  から自然数  $\mathbb{N}$  への写像で単調増加であるものである。例えば  $\alpha(n) = 2n$  の場合  $\{x_{\alpha(n)}\}$  は偶数番目のみから作られる部分列となる。

$\alpha(1) = 1$  と定義する。 $a_1 = a, b_1 = b$  とし、 $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$  と置く。2つの区間  $I_1 = [a_1, c_1]$  と  $J_1 = [c_1, b_1]$  のどちらかは  $x_n$  ( $n \geq 1$ ) を無限個含んでいる。 $I_1$  が無限個含んでいるときは  $a_2 = a_1, b_2 = c_1$  と置く。 $J_1$  が無限個含んでいるときは  $a_2 = c_1, b_2 = b_1$  と置く。 $[a_2, b_2]$  に含まれる  $x_n$  で  $n > \alpha(1)$  となるものを1つ選びその番号を  $\alpha(2)$  とする。

$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$  と置く。2つの区間  $I_2 = [a_2, c_2]$  と  $J_2 = [c_2, b_2]$  のどちらかは  $x_n$  ( $n \geq \alpha(2)$ ) を無限個含んでいる。 $I_2$  が無限個含んでいるときは  $a_3 = a_2, b_3 = c_2$  と置く。 $J_2$  が無限個含んでいるときは  $a_3 = c_2, b_3 = b_2$  と置く。 $[a_3, b_3]$  に含まれる  $x_n$  で  $n > \alpha(2)$  となるものを1つ選びその番号を  $\alpha(3)$  とする。

$k$  番目まで  $a_k, b_k, \alpha(k)$  が選ばれているとする。 $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  と置く。2つの区間  $I_k = [a_k, c_k]$  と  $J_k = [c_k, b_k]$  のどちらかは  $x_n$  ( $n \geq \alpha(k)$ ) を無限個含んでいる。 $I_k$  が無限個含んでいるときは  $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k$  と置く。 $J_k$  が無限個含んでいるときは  $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$  と置く。 $[a_{k+1}, b_{k+1}]$  に含まれる  $x_n$  で  $n > \alpha(k)$  となるものを1つ選びその番号を  $\alpha(k+1)$  とする。

このことを繰り返すと数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  及び部分列  $\{x_{\alpha(n)}\}$  が定まる。作り方から  $a_n$  は上に有界な単調増加数列であり、 $b_n$  は下に有界な単調減少数列であり、任意の自然数  $n$  に対し

$$a_n \leq x_{\alpha(n)} \leq b_n$$

が成立する。定理 1.3 (上に有界な単調増加数列は収束する) および演習問題 1.5 より  $a_n$  および  $b_n$  は収束する。 $b_n - a_n = (b - a) \frac{1}{2^{n-1}}$  より  $a_n$  と  $b_n$  は同じ値  $A$  に収束する。はさみうちの定理 (定理 1.2 (3)) より  $x_{\alpha(n)}$  の同じ値  $A$  に収束する。即ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\alpha(n)} = A$$

$a \leq a_n \leq x_{\alpha(n)} \leq b_n \leq b$  より  $a \leq A \leq b$ , 即ち  $A \in I$  である。 $f$  は連続なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\alpha(n)}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\alpha(n)}\right) = f(A)$$

となるが、一方

$$f(x_{\alpha(n)}) > \alpha(n) \geq n$$

なので  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\alpha(n)}) = \infty$  となる。これは矛盾、よって  $f$  は有界である。

定理 1.9 の証明に入ろう。定理が成立しないとす。即ち関数  $f$  に最大値が存在しないと仮定する。 $X = \{f(x) \mid x \in I\}$  は上に有界であるので  $X$  の最小上界 (上限)  $\sup X$  が存在する。これを  $M$  とする。 $f(x) = M$  となる  $x \in I$  が存在すればそれは最大値である。よって  $f(x) = M$  となる  $x$  は  $I$  に存在しない。

もし「 $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in I f(x) \leq M - \frac{1}{n}$ 」が成立すると  $M - \frac{1}{n}$  が上界になり、 $M$  が最小上界ということに反する。よってこの否定、即ち

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in I f(x) > M - \frac{1}{n}$$

が成立する。この性質をもつ  $x$  を  $x_n$  とすると、 $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$ 、即ち

$$\frac{1}{M - f(x_n)} > n$$

が成立する。

$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$  とおくと、分母が 0 にならないので  $g(x)$  は連続関数である。すでに示したことから  $g(x)$  は有界である。しかし任意の自然数  $n$  に対し

$$g(x_n) = \frac{1}{M - f(x_n)} > n$$

となる  $x_n$  が存在するので有界ではない。これは矛盾なので最大値が存在する。

次に定理 1.10 を証明する。 $I = [a, b]$ 、 $X = \{x \in I \mid f(x) \leq \alpha\}$  と定義する。 $X$  は上に有界なので最小上界  $\sup X$  が存在する。これを  $c$  とする。

(1)  $f(c) \leq \alpha$  が成立する。これを背理法で示す。結論が成立しないとすると、 $f(c) > \alpha$  である。 $\varepsilon = f(c) - \alpha$  とすると  $\varepsilon > 0$  よりある  $\delta > 0$  が存在して

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

が成立する。このとき  $-\varepsilon < f(x) - f(c)$  なので、 $-(f(c) - \alpha) < f(x) - f(c)$  より  $\alpha < f(x)$  が成立する。 $\sup X$  より小さい実数は  $X$  の上界ではないので  $c - \delta$  は  $X$  の上界ではない。即ち

$$\exists t \in X \quad c - \delta < t \leq c$$

が成立する。 $t \in X$  より  $f(t) \leq \alpha$  である。一方  $|t - c| < \delta$  なので  $\alpha < f(t)$  が成立する。これは矛盾、よって (1) が成立する。

(2)  $f(c) \geq \alpha$  が成立する。これを背理法で示す。結論が成立しないとすると、 $f(c) < \alpha$  である。 $\varepsilon = \alpha - f(c)$  とおくと  $\varepsilon > 0$  よりある  $\delta > 0$  が存在して

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

が成立する。このとき  $f(x) - f(c) < \varepsilon$  なので、 $f(x) - f(c) < \alpha - f(c)$  より  $f(x) < \alpha$  が成立する。 $t = c + \frac{\delta}{2}$  とするとき、 $|t - c| < \delta$  なので  $f(t) < \alpha$  が成立する。よって  $t \in X$  となる。これは  $c$  が  $X$  の上界ということに反する。よって (2) が成立する。以上により  $f(c) = \alpha$  が示される。

最後に定理 1.11 を証明する。最初に単調増加関数に関して証明する。

$R = (-\infty, \infty)$  と考えると定義域は  $a = -\infty, b = \infty$  の場合も含めて  $I = [a, b), (a, b], (a, b), [a, b]$  のいずれかの形をしている。

$b$  が実数で  $b \in I$  のとき  $d = f(b)$  とおき,  $b$  が実数で  $b \notin I$  のとき  $d = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$  とおき,  $b = \infty$  のとき  $d = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  とおく。  $a$  が実数で  $a \in I$  のとき  $c = f(a)$  とおき,  $a$  が実数で  $a \notin I$  のとき  $c = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  とおき,  $a = -\infty$  のとき  $c = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  とおく。

$f$  を閉区間  $I = [a, b]$  で定義された単調増加で連続な関数とする。  $I = [a, b), (a, b], (a, b), [a, b]$  のそれぞれの場合  $J = [c, d), (c, d], (c, d), [c, d]$  とおく。このとき  $f: I \rightarrow J$  が全単射であることを示す。単調増加関数が単射であることはすでに示しているので, 全射であることを示す。

$\alpha$  を  $J$  の任意の元とする。  $\alpha = c$  のときは  $a \in I$  に対し  $f(a) = c = \alpha$  となる。  $\alpha = d$  のときは  $b \in I$  に対し  $f(b) = d = \alpha$  となるので成立している。よって  $\alpha \neq c$  かつ  $\alpha \neq d$  とすると  $c < \alpha < d$  である。中間値の定理より  $e \in I$  が存在して  $f(e) = \alpha$  となる。よって  $f$  は全射である。

よって逆関数  $f^{-1}: J \rightarrow I$  が存在する。  $f^{-1}$  も単調増加であることを示す。  $y_1, y_2 \in J$  が  $y_1 < y_2$  を満たすとする。  $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$  とおくと  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$  となる。  $x_1$  と  $x_2$  は (1)  $x_1 > x_2$ , または (2)  $x_1 = x_2$ , または (3)  $x_1 < x_2$  のいずれかが成立している。(1) のとき  $x_1 > x_2$  と  $f$  が単調増加であることから

$$y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$$

となる。これは矛盾。(2) のとき

$$y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$$

となり, これも矛盾。よって (3) が起こっている。よって

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

となるので  $f^{-1}$  は単調増加である。

$f^{-1}$  が連続であることを示す。  $\alpha \in J$  とする。  $\alpha \neq c$  かつ  $\alpha \neq d$  の場合を考える。  $f^{-1}(\alpha) = e$  とおくと  $f(e) = \alpha$  である。  $\varepsilon$  を任意の正の実数とする。  $x_1 = \max\{e - \varepsilon, a\}, x_2 = \min\{e + \varepsilon, b\}$  とおくと,  $x_1 < e < x_2$  が成立している。このとき  $f(x_1) < f(e) < f(x_2)$  が成立する。  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$  とおくと  $y_1 < \alpha < y_2$  が成立する。  $\delta = \min\{y_2 - \alpha, \alpha - y_1\}$  とおく。  $|y - \alpha| < \delta$  となる任意の  $y \in J$  に対し

$$y_1 - \alpha = -(\alpha - y_1) \leq -\delta < y - \alpha < \delta \leq y_2 - \alpha$$

が成立するので  $y_1 < y < y_2$  が成立する。よって

$$x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2$$

が成立する。

$$-\varepsilon \leq x_1 - e < f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha) < x_2 - e \leq \varepsilon$$

より  $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha)| < \varepsilon$  となるので  $\alpha$  において連続である。

$\alpha = c$  のとき  $\alpha \in J$  より  $\alpha = f(a)$  ( $a \in I$ ) となっている。  $\varepsilon$  を任意の正の実数とする。  $x_2 = \min\{a + \varepsilon, b\}$  と置くと  $a < x_2$  が成立している。このとき  $f(a) < f(x_2)$  が成立する。  $y_2 = f(x_2)$  と置くと  $\alpha < y_2$  が成立する。  $\delta = y_2 - \alpha$  とおくと  $0 \leq y - \alpha < \delta$  となる任意の  $y \in J$  に対し

$$f^{-1}(\alpha) \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(\delta + \alpha) = x_2$$

が成立する。よって

$$0 \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha) < x_2 - a \leq \varepsilon$$

が成立する。よって  $f^{-1}$  は  $f(a)$  で連続である。

$\alpha = d$  のとき  $\alpha \in J$  より  $\alpha = f(b)$  ( $b \in I$ ) となっている。 $\varepsilon$  を任意の正の実数とする。 $x_1 = \max\{b - \varepsilon, a\}$  と置くと  $x_1 < b$  が成立している。このとき  $f(x_1) < f(b)$  が成立する。 $y_1 = f(x_1)$  と置くと  $y_1 < \alpha$  が成立する。 $\delta = \alpha - y_1$  とおくと  $-\delta \leq y - \alpha \leq 0$  となる任意の  $y \in J$  に対し

$$x_1 = f^{-1}(\alpha - \delta) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(\alpha)$$

が成立する。よって

$$-\varepsilon \leq x_1 - b \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha) \leq 0$$

が成立する。よって  $f^{-1}$  は  $f(b)$  で連続である。

次に  $f(x)$  が単調減少である場合を考える。 $g(x) = -f(x)$  とおくと  $g(x)$  は単調増加関数である。このとき  $g$  の定義域を  $I$ , 終域を  $J$  とすると

$$g: I \rightarrow J$$

は全単射である。このとき  $K = \{-y \mid y \in J\}$  とおくと  $f$  が  $I$  から  $K$  への写像で

$$f: I \rightarrow K$$

も全単射であることを示す。単調関数は単射なので全射を示す。 $y$  を  $K$  の任意の元とすると,  $-y$  は  $J$  の元である。 $g$  は全射なので, ある  $x \in I$  が存在して

$$-y = g(x) = -f(x)$$

が成立する。よって  $y = f(x)$  となるので  $f$  は全射である。

演習問題 1.8 定理 1.10 の成立を前提として次を証明せよ。

閉区間  $[a, b]$  で定義された連続関数  $f$  が  $f(a) > f(b)$  を満たしているとする。 $f(a) > \alpha > f(b)$  となる任意の  $\alpha$  に対しある  $c$  ( $a < c < b$ ) が存在して  $f(c) = \alpha$  となる。

$g(x) = -f(x)$  とおくと,  $g(x)$  は  $[a, b]$  で定義された連続関数であり  $g(a) < g(b)$  となっている。 $\alpha$  を  $f(a) > \alpha > f(b)$  を満たす任意の実数とする。 $\beta = -\alpha$  とし, この  $g(x)$ ,  $\beta$  に定理 1.10 を適用すると,  $a < c < b$  を満たす  $c$  で  $g(c) = \beta$  となるものが存在する。

$$g(a) < g(c) = \beta < g(b)$$

より

$$-f(a) < -f(c) = -\alpha < -f(b)$$

であるが, 3 辺に  $-1$  をかけると

$$f(a) > f(c) = \alpha > f(b)$$

が得られる。

演習問題 1.9 微分可能な関数は連続であることを示せ。また連続であるが微分可能でない関数の例をあげよ。

$f(x)$  が  $x = a$  で微分可能のとき  $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$  と置くと  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  となる。よって

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h) = f(a)$$

となるので  $f$  は  $x = a$  で連続である。

$y = f(x) = |x|$  (絶対値) とする。  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$  なので  $f$  は  $x = 0$  で連続である。

しかし

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1$$

であり,

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1$$

なので  $x = 0$  で微分可能ではない。

演習問題 1.10  $f(x)$  を多項式とするととき次を示せ。  $h = x - a$  とおき  $f(x)$  を  $h$  に関する多項式に変形するとき

$$f(x) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \cdots + a_nh^n$$

となっているとする。

(1)  $y = f(x)$  を  $x = a$  で近似する 1 次式は  $g_1(h) = a_0 + a_1h$  である。

(2)  $y = f(x)$  を  $x = a$  で近似する 2 次式は  $g_2(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2$  である。

(1)  $d(h) = f(x) - g_1(h)$  とおき,  $\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h}$  とおく。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_2h^2 + \cdots + a_nh^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (a_2h + \cdots + a_nh^{n-1}) = 0$$

より  $g_1(h)$  は  $x = a$  で  $y = f(x)$  を近似する 1 次式である。

(2)  $d(h) = f(x) - g_2(h)$  とおき,  $\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^2}$  とおく。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_3h^3 + \cdots + a_nh^n}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} (a_3h + \cdots + a_nh^{n-2}) = 0$$

より  $g_2(h)$  は  $x = a$  で  $y = f(x)$  を近似する 2 次式である。

演習問題 1.11  $y = f(x) = f(a+h)$  を  $x = a$  で近似する  $h$  の 3 次式を求めよ。ここで近似する 3 次式  $g(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$  とは  $d(h) = f(a+h) - g(h)$  に対し  $\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^3}$  とおくとき  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  が成立するものをいう。関数は何回でも微分できることを仮定する。

3次式  $g(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$  に対し

$$d(h) = f(a+h) - g(h)$$

$$\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^3}$$

とおくとき  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  が成立している。 $d(h) = \varepsilon(h)h^3$  なので  $\lim_{h \rightarrow 0} d(h) = 0$  となる。よって

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} d(h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( f(a+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - \lim_{h \rightarrow 0} (A + Bh + Ch^2 + Dh^3) = f(a) - A \end{aligned}$$

となるので  $A = f(a)$  である。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h^2 = 0 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + Bh + Ch^2 + Dh^3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} (B + Ch + Dh^2) \\ &= f'(a) - B \end{aligned}$$

となるので  $B = f'(a)$  である。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h = 0 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + f'(a)h + Ch^2 + Dh^3)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) - 2Ch - 3Dh^2}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(a+h) - 2C - 6Dh}{2} \\ &= \frac{f''(a) - 2C}{2} \end{aligned}$$

となるので  $C = \frac{f''(a)}{2}$  である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + Dh^3)}{h^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) - f''(a)h - 3Dh^2}{3h^2} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(a+h) - f''(a) - 6Dh}{6h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'''(a+h) - 6D}{6} \\
&= \frac{f'''(a) - 6D}{6}
\end{aligned}$$

となるので  $D = \frac{f'''(a)}{6}$  である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

以上により近似 3 次式は

$$f(x) = f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3$$

である。

**演習問題 1.12** 次の関数  $y = f(x)$  を  $x = a$  で近似する 1 次式, 2 次式, 3 次式を求めよ。

(1)  $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  ( $a = 0$ )                      (2)  $f(x) = e^x$  ( $a = 1$ )

(3)  $f(x) = (x+1)^5$  ( $a = 0$ )

ここでは演習問題 1.11 の成立を仮定した解答とする。最後に演習問題 1.11 の結果を使わない解答を (2) についてのみ述べる。 $x = a$  で  $f(x)$  を近似する 1 次式, 2 次式, 3 次式をそれぞれ  $g_1(h), g_2(h), g_3(h)$  とする。

(1)  $f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $f''(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $f^{(3)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $f^{(4)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  なので  $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $f'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $f''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $f^{(3)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $f^{(4)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  である。演習問題 1.11 より  $x = 0$  で  $f(x)$  を近似する 1 次式, 2 次式, 3 次式はそれぞれ

$$\begin{aligned}
g_1(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h \\
g_2(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2 \\
g_3(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}h^3
\end{aligned}$$

である。

(2)  $f'(x) = e^x$  より任意の自然数  $n$  に対し  $f^{(n)}(x) = e^x$  である。 $f(1) = f'(1) = f^{(2)}(1) = f^{(3)}(1) = f^{(4)}(1) = e$  なので

$$\begin{aligned}
g_1(h) &= e + eh \\
g_2(h) &= e + eh + \frac{e}{2}h^2 \\
g_3(h) &= e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3
\end{aligned}$$

である。

(3)  $f'(x) = 5(x+1)^4$ ,  $f''(x) = 20(x+1)^3$ ,  $f^{(3)}(x) = 60(x+1)^2$ ,  $f^{(4)}(x) = 120(x+1)^1$  より  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 5$ ,  $f''(0) = 20$ ,  $f^{(3)}(0) = 60$ ,  $f^{(4)}(0) = 120$  となる。よって

$$g_1(h) = 1 + 5h$$

$$g_2(h) = 1 + 5h + 10h^2$$

$$g_3(h) = 1 + 5h + 10h^2 + 10h^3$$

である。

(3) に関連して  $f(x)$  が多項式の場合の近似式について述べておく。 $f(x)$  が多項式の場合  $x = a$  で近似することは  $f(x)$  を  $(x-a)$  について展開しなおすことになる。例えば  $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  を  $x = 1$  で近似することを考える。 $x - 1$  で展開するので  $f(x)$  を  $x - 1$  で割ると

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 3) + 4$$

となる。 $x^2 + 2x + 3$  を  $x - 1$  で割ると

$$x^2 + 2x + 3 = (x-1)(x+3) + 6$$

となる。 $x + 3$  を  $x - 1$  で割ると

$$x + 3 = (x-1) + 4$$

となる。この結果を代入していくと

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 + (x-1)(x^2 + 2x + 3) \\ &= 4 + (x-1)((x+3)(x-1) + 6) \\ &= 4 + 6(x-1) + (x-1)^2(x+3) \\ &= 4 + 6(x-1) + (x-1)^2(x-1+4) \\ &= 4 + 6(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3 \end{aligned}$$

を得る。よって近似する 1 次式, 2 次式, 3 次式は

$$4 + 6(x-1)$$

$$4 + 6(x-1) + 4(x-1)^2$$

$$4 + 6(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3$$

である。一般の多項式の  $x - a$  での近似はこの方法でも得られる。

演習問題 1.11 の結果を使用しない解答を (2) の 3 次式の場合のみ述べる。やり方を見れば分かるように, 演習問題 1.11 の結果を使用しない場合, 演習問題 1.11 で議論したことをもう一度議論し直すことになる。

求める 3 次式を  $g(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$  とする。

$$d(h) = f(1+h) - g(h) = e^{1+h} - g(h)$$

$$\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^3}$$

と置くと  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  が成立している。  $\lim_{h \rightarrow 0} d(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h^3 = 0$  なので  $d(0) = e^{1-0} - g(0) = e - A$  より  $A = e$  を得る。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h^2 = 0 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - (e + Bh + Ch^2 + Dh^3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} (B + Ch + Dh^2) \\ &= f'(1) - B = e - B \end{aligned}$$

より  $B = e$  を得る。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)h = 0 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(h)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - (e + eh + Ch^2 + Dh^3)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{1+h})' - (e + 2Ch + 3Dh^2)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{1+h})'' - (2C + 6Dh)}{2} \\ &= \frac{e - 2C}{2} \end{aligned}$$

より  $C = \frac{e}{2}$  を得る。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - (e + eh + \frac{e}{2}h^2 + Dh^3)}{h^3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{1+h})' - (e + eh + 3Dh^2)}{3h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{1+h})'' - (e + 6Dh)}{6h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{1+h})''' - 6D}{6} \\ &= \frac{e - 6D}{6} \end{aligned}$$

より  $D = \frac{e}{6}$  を得る。以上により

$$g(h) = e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3$$

を得る。

**演習問題 1.13** 定理の証明の最後の部分 (最小値  $c$  が  $a < c < b$  に存在するとき  $f'(c) = 0$  となる) を証明せよ。

最小値を与える  $c$  が  $a < c < b$  を満たしているとする。任意の  $h$  に対し  $c+h$  が区間  $[a, b]$  に入っていれば  $f(c+h) \geq f(c)$  が成立する。  $h > 0$  のとき  $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$  なので

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成立する。また  $h < 0$  のとき  $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$  なので

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

が成立する。  $0 \leq f'(c) \leq 0$  より  $f'(c) = 0$  である。

演習問題 1.14 平均値の定理から系 1.20, 1.21, 1.22 を導け。

最初に系 1.20 を示す。区間内の任意の  $x_1, x_2$  について,  $x_1 < x_2$  とすると平均値の定理よりある  $c$  ( $x_1 < c < x_2$ ) が存在して  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$  と書ける。(1) の条件より  $f'(c) = 0$  なので  $f(x_2) - f(x_1) = 0$  即ち任意の  $x_1, x_2$  に対し  $f(x_2) = f(x_1)$  が成立する。これは  $f$  が定数関数である事を示している。よって (1) が示された。

(2) は  $h(x) = f(x) - g(x)$  とおき,  $h(x)$  に (1) を適用する。  $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$  より区間  $I$  において  $h'(x) = 0$  なので  $h(x)$  は定数関数である。これを  $C$  とすると,  $f(x) = g(x) + h(x) = g(x) + C$  となる。

次に系 1.21 を示す。区間内の任意の  $x_1, x_2$  について,  $x_1 < x_2$  とすると平均値の定理よりある  $c$  ( $x_1 < c < x_2$ ) が存在して  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$  と書ける。(1) の条件より  $f'(c) > 0$  かつ  $x_2 - x_1 > 0$  なので  $f(x_2) - f(x_1) > 0$  である。即ち任意の  $x_1, x_2$  に対し  $x_1 < x_2$  ならば  $f(x_1) < f(x_2)$  が成立する。これは  $f$  が単調増加関数である事を示している。よって (1) が示された。

(2) は,  $x_1 < x_2$  を満たす任意の  $x_1, x_2$  に対し平均値の定理を適用するとある  $c$  ( $x_1 < c < x_2$ ) が存在して  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$  と書ける。このとき  $f'(c) < 0, x_2 - x_1 > 0$  より  $f(x_2) - f(x_1) < 0$  である。即ち任意の  $x_1, x_2$  に対し  $x_1 < x_2$  ならば  $f(x_1) > f(x_2)$  となる。よって  $f$  は単調減少関数である。

最後に系 1.22 を示す。  $x_1 < x_2$  を満たす任意の  $x_1, x_2$  に対し平均値の定理を適用するとある  $c$  ( $x_1 < c < x_2$ ) が存在して

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

と書ける。このとき (1) の条件より  $f'(c) \geq 0$  となっている。また  $x_2 - x_1 > 0$  より  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$  即ち  $f(x_1) \leq f(x_2)$  となる。よって  $f$  は単調非減少である。よって (1) が示された。

$x_1 < x_2$  を満たす任意の  $x_1, x_2$  に対し平均値の定理を適用するとある  $c$  ( $x_1 < c < x_2$ ) が存在して  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$  と書ける。このとき (2) の条件より  $f'(c) \leq 0$  となっている。  $x_2 - x_1 > 0$  より  $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$  即ち  $f(x_1) \geq f(x_2)$  となる。よって  $f$  は単調非増加である。

演習問題 \*1.15 定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

$f, g$  は  $a$  の周りで微分可能とする。 $f(a) = g(a) = 0$  あるいは、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  かつ  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$  となるとき、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在すれば  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  も存在して、両者の値は一致する。ここで  $a$  は  $\pm\infty$  でもよい。

最初に  $f(a) = g(a) = 0$  の場合を証明する。 $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  および  $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  を証明すれば  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が証明される。  
 $x > a$  の場合を考える。 $f(a) = g(a) = 0$  なので

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

が成立している。このとき定理 1.18 より  $a < c < x$  となる  $c$  で

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

となるものが存在する。 $x \rightarrow a+0$  とすると  $c \rightarrow a+0$  となるので

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する。 $x < a$  の場合も同様なので省略する。

次に  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  かつ  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$  の場合を考える。 $F(x) = \frac{1}{f(x)}$  ( $x \neq a$ ),  $F(a) = 0$ ,  $G(x) = \frac{1}{g(x)}$  ( $x \neq a$ ),  $G(a) = 0$ , とおくと  $F$  および  $G$  は  $x = a$  で連続である。 $F, G$  に今証明したロピタルの定理の  $f(a) = g(a) = 0$  の場合を適用すると

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。ここで  $f(x)F(x) = 1$  より  $f'(x)F(x) + f(x)F'(x) = 0$  即ち  $F'(x) = -\frac{f'(x)F(x)}{f(x)}$

が成立する。同様に  $G'(x) = -\frac{g'(x)G(x)}{g(x)}$  が成立する。上式に代入すると

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \frac{g(x)}{f(x)} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。これを整理する

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

が得られる。ただし途中  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$  の収束を仮定した。