解析学 I 問題解説 #4

河野

演習問題 1.16　ライプニッツの定理を数学的帰納法で証明せよ。

2 項係数に関して

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

が成立することは使用してよい。

2 項係数の等式の証明を述べておく。

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}&=\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\&=\frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)(n-k)!}\\&=\frac{kn!}{k!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

$f(x),g(x)$ を f,g と書く。$\binom{1}{0}=1,\ \binom{1}{1}=1$ なので

$$(fg)'=f'g+fg'=\binom{1}{0}f'g+\binom{1}{1}fg'$$

より $n=1$ のとき成立している。n のとき成立を仮定する。即ち

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$$

の成立を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f\cdot g)&=\left(\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g)\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k)}g^{(k)}\right)'\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left(f^{(n-k)}\right)'g^{(k)}+f^{(n-k)}\left(g^{(k)}\right)'\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k+1)}g^{(k)}+f^{(n-k)}g^{(k+1)}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k+1)}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n-k+1)}g^{(k)}\\&=\binom{n}{0}f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\binom{n}{n}f^{(0)}g^{(n+1)}\\&=\binom{n+1}{0}f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\binom{n+1}{n+1}f^{(0)}g^{(n+1)}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}$$

となり $n+1$ のときも成立する。

演習問題 1.17　次の関数の n 次導関数を求めよ。(問題では「数学的帰納法で示す」ことを要求されてないので，数学的帰納法で証明しなくてもよいが，それを要求されたときはできるようにしておくこと。)

(1) $f(x) = x^3 e^x$

(2) $f(x) = x^3 \log x$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(4) $f(x) = \log(x+1)$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

(6) $f(x) = \sin x$

(7) $f(x) = \sin x \cos x$

(8) $f(x) = x^4$

問題では帰納法で証明することは要求されていないが，解説しておく。

(1)　ライプニッツの定理

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

を用いる。$f(x)$ は関数に用いられているので，定理の $f(x)$ を $g(x)$ に $g(x)$ を $h(x)$ に変更して，$g(x) = e^x$，$h(x) = x^3$ とすると，$h'(x) = 3x^2$，$h''(x) = 6x$，$h^{(3)}(x) = 6$，$h^{(k)}(x) = 0$ $(k \geq 4)$ および $g^{(n)}(x) = e^x$ である。よって

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} g^{(n)}(x) h(x) + \binom{n}{1} g^{(n-1)}(x) h^{(1)}(x) + \binom{n}{2} g^{(n-2)}(x) h^{(2)}(x) + \binom{n}{3} g^{(n-3)}(x) h^{(3)}(x) \\
&= e^x x^3 + n e^x 3x^2 + \frac{n(n-1)}{2} e^x 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} e^x 6 \\
&= \left(x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right) e^x
\end{aligned}$$

となる。

(2)　ライプニッツの定理を用いてもよいが，何回か微分してみる。$f'(x) = 3x^2 \log x + x^2$，$f''(x) = 6x \log x + 5x$，$f^{(3)}(x) = 6 \log x + 11$，$f^{(4)}(x) = \dfrac{6}{x}$ となる。4 次以上の導関数について $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ を用いると，次が得られる。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 \log x + x^2 \\
f''(x) &= 6x \log x + 5x \\
f^{(3)}(x) &= 6 \log x + 11 \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n 6(n-4)! \frac{1}{x^{n-3}} \quad (n \geq 4)
\end{aligned}$$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ を数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のときは

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-2} = (-1)^1 1! x^{-(1+1)}$$

より成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k)}=(-1)^k k! x^{-(k+1)}$ の成立を仮定する。両辺を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)^{(k+1)} &= \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}\right)' = \left((-1)^k k! x^{-(k+1)}\right)' \\
&= -(-1)^k k!(k+1)x^{-(k+1)-1} = (-1)^{k+1}(k+1)! x^{-((k+1)+1)}
\end{aligned}
$$

となるので $n=k+1$ でも成立している。

(3)　$f(x)=(x+1)^{-1}$ なので $f'(x)=-(x+1)^{-2}$, $f''(x)=2(x+1)^{-3}$, $f'''(x)=-6(x+1)^{-4}=-3!(x+1)^{-4}$ となるので $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}$ と予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。予想が正しくない場合は「証明」の途中で辻褄が合わなくなるので，予想が間違っていることに気がつく。

$n=1$ のときは $f'(x)=-(x+1)^{-2}=(-1)^1 1!(x+1)^{-(1+1)}$ なので予想は正しい。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k k!(x+1)^{-(k+1)}$$

を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k k!(x+1)^{-(k+1)}\right)' \\
&= (-1)^k k!(-(k+1))(x+1)^{-(k+2)} \\
&= (-1)^{k+1}(k+1)!(x+1)^{-((k+1)+1)}
\end{aligned}
$$

となり $n=k+1$ のときも予想が正しいことがわかる。

(4)　$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$f''(x)=-(x+1)^{-2}$，$f^{(3)}(x)=2(x+1)^{-3}$，$f^{(4)}(x)=-6(x+1)^{-4}$ なので

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}$$

と予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}=(-1)^{1+1}(1-1)!(x+1)^{-1}$$

なので予想は正しい。$n=k$ のとき予想が正しいと仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}(k-1)!(x+1)^{-k}$ の成立を仮定する。このとき $f^{(k)}(x)$ を x で微分すると，

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\
&= \left((-1)^{k+1}(k-1)!(x+1)^{-k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(x+1)^{-k-1} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}((k+1)-1)!(x+1)^{-(k+1)}
\end{aligned}
$$

となるので $k+1$ のときも成立する。

(5)　部分分数展開して

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

とできるので

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}n!\frac{1}{x^{n+1}}+(-1)^n n!\frac{1}{(x-1)^{n+1}}$$

と予想される。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(-\frac{1}{x}\right)'+\left(\frac{1}{x-1}\right)'\\&=x^{-2}-(x-1)^{-2}\\&=(-1)^2 1!\frac{1}{x^{1+1}}+(-1)^1 1!\frac{1}{(x-1)^{1+1}}\end{aligned}$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}k!\frac{1}{x^{k+1}}+(-1)^k k!\frac{1}{(x-1)^{k+1}}$$

の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'\\&=(-1)^{k+1}k!\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)'+(-1)^k k!\left(\frac{1}{(x-1)^{k+1}}\right)'\\&=(-1)^{k+1}k!\frac{-(k+1)}{x^{k+2}}+(-1)^k k!\frac{-(k+1)}{(x-1)^{k+2}}\\&(-1)^{k+1+1}(k+1)!\frac{1}{x^{(k+1)+1}}+(-1)^{k+1}(k+1)!\frac{1}{(x-1)^{(k+1)+1}}\end{aligned}$$

となる。よって $k+1$ のときも成立している。

(6)　$f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，$f^{(3)}(x)=-\cos x$，$f^{(4)}(x)=\sin x$ より

$$f^{(4m)}(x)=\sin x,\quad f^{(4m+1)}(x)=\cos x,\quad f^{(4m+2)}(x)=-\sin x,\quad f^{(4m+3)}(x)=-\cos x$$

となる。場合分けによらない書き方もある。$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ となる。2 階以上も同様に $f''(x)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(3)}=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$ となる。一般に

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

とも表すことができる。

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ が成立することを数学的帰納法で示す。$n=0$ のとき

$$f^{(0)}(x)=f(x)=\sin x=\sin\left(x+\frac{0\pi}{2}\right)$$

より成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)} = \sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)' \\ &= \sin\left(\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。よって $n=k+1$ でも成立している。

(7)　$\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ となる。前問の結果 $[(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)]$ より

$$(\sin 2x)^{(n)} = 2^n \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

と予想できる。

$n=1$ のとき

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $(\sin 2x)^{(k)} = 2^k\sin\left(2x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。

$$\begin{aligned} (\sin 2x)^{(k+1)} &= \left((\sin 2x)^{(k)}\right)' = \left(2^k\sin\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)' \\ &= 2^k\cdot 2\sin\left(2x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2^{k+1}\sin\left(2x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

なので $n=k+1$ のときも成立する。よって

$$(\sin x\cos x)^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

である。

(8)　$f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, $f^{(3)}(x)=24x$, $f^{(4)}(x)=24$, $f^{(5)}(x)=0$, $f^{(n)}(x)=0$ $(n\geq 6)$ となる。この書き方でもよいが，少し「格好つける」なら順列の記号 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = {}_4P_n x^{4-n}$$

としてもよい。

演習問題 1.18　定理 1.27 の (1),(2) の 2) の場合を証明せよ。

$f^{(n)}$ 連続かつ $f^{(n)}(a)<0$ なので a を含むある区間 $(a-\delta, a+\delta)$ において $f^{(n)}(x)<0$ となる。この区間内の x についてテーラーの定理を適用すると $f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ なので $f(x)=f(a)+\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ となる。(1) 即ち n が偶数の場合 $x\neq a$ ならば $(x-a)^n>0$ なの

で，$f(x)-f(a)<0$ 即ち $f(x)<f(a)$ となる。よって f は $x=a$ で極大である。(2) 即ち n が奇数の場合 $x>a$ なら $(x-a)^n>0$，$x-a<0$ ならば $(x-a)^n<0$ である。よって $x>a$ ならば $f(x)<f(a)$，$x<a$ ならば $f(x)>f(a)$ となっている。

演習問題 1.19　$f(x)=e^x$ を $a=0, n=6$ としてテーラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい

$f(x)=e^x$ とすると $f^{(n)}(x)=e^x$ なので

$$f(x)=\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k!}x^k+R_6 \qquad (R_6=\frac{e^c}{6!}x^6)$$

となる。ここで c は $x>0$ なら $0<c<x$，$x<0$ なら $x<c<0$ を満たす。$g(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k!}x^k$ とすると $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{e}} &\fallingdotseq g\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(-\frac{1}{2}\right)^5\\ &=\frac{2329}{3840}=0.606510416\end{aligned}$$

となる。$-\dfrac{1}{2}<c<0$ なので $0<e^c<e^0=1$ となる。よって誤差は

$$|\Delta|=|R_6|=\left|\frac{e^c}{6!}\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right|<\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{46080}=2.170138888888889\times10^{-5}$$

と評価できる。

剰余項 R_n は

$$|R_n|=\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n\right|=\frac{e^c}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n<10^{-10}$$

を満たしていればよい。不等式を計算すると $n!\cdot 2^n>10^{10}$ となる。$n=11$ のとき

$$11!\cdot 2^{11}=81749606400>10^{10}$$

となるので $g_{10}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{k!}x^k$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\fallingdotseq g_{10}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2253801941}{3715891200}=0.60653051978486$$

演習問題 1.20　$f(x)=\cos x$ を $a=0, n=6$ としてテーラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい。

$f(x)=\cos x$ とおくと $f'(x)=-\sin x, f''(x)=-\cos x, f^{(3)}(x)=\sin x, f^{(4)}(x)=\cos x, f^{(5)}(x)=-\sin x, f^{(6)}(x)=-\cos x$ なので $f(0)=1, f''(0)=-1, f^{(4)}(0)=1, f^{(6)}(0)=-1, f'(0)=f^{(3)}(0)=f^{(5)}(0)=0$ となる。

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+R_6 \qquad \left(R_6=\frac{-\cos c}{6!}x^6\right)$$

$g(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4$ とおくと $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ の近似値は

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\fallingdotseq g\left(\frac{\pi}{10}\right)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4=0.9510578492071949$$

となる。$f^{(6)}(x)=-\cos x$ なので $\left|f^{(6)}(c)\right|\leq 1$ となっている。よって誤差は

$$|\Delta|=\left|\frac{-\cos c}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6\right|\leq\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6<\frac{1}{6!}\left(\frac{4}{10}\right)^6=5.688889\times 10^{-6}$$

と評価できる。

$f^{(n)}(x)$ は $\pm\cos x, \pm\sin x$ のいずれかなので $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq 1$ が成立する。剰余項 R_n は

$$|R_n|=\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n\right|\leq\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^n<\frac{1}{n!}\left(\frac{2}{5}\right)^n<10^{-10}$$

を満たしていればよい。不等式は $n!\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^n>10^{10}$ となる。$n=10$ のとき

$$10!\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{10}=\frac{138427734375}{4}=3.460693359375\times 10^{10}>10^{10}$$

となるので $g_9(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4-\dfrac{1}{6!}x^6+\dfrac{1}{8!}x^8$ とおくと

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\fallingdotseq g_9\left(\frac{\pi}{10}\right)=0.9510565162977323$$

演習問題 1.21 　次の関数の $a=0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。(1)–(5) のテーラー級数は $-1<x<1$ の範囲で, (8) のテーラー級数は $-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ の範囲で考える。なお一般の実数 α と自然数 n に対し

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\quad(n\geq 1),\qquad \binom{\alpha}{0}=1$$

と定義する。これは α が自然数の場合の 2 項係数の拡張になっている。

(1) $f(x)=\log(1+x)$ 　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x)=\sqrt{1+x}$ 　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　　(6) $f(x)=e^{2x}$

(7) $f(x)=\sin 3x$　　(8) $f(x)=\log(2x+3)$

(1)　$f(x)=\log(1+x)$ に対して，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$，$f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$ となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \;=\; f'(x)=\frac{1}{1+x}=(-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{-k}{(1+x)^{k+1}} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}\frac{k!}{(1+x)^{k+1}} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}
\end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+0)^k}=(-1)^{k+1}(k-1)!$ (この式は $k=0$ のとき成立しないことに注意！),
および $f(0)=\log(1+0)=\log 1=0$ なので

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \\
&= f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-1)^{k+1}(k-1)!x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k
\end{aligned}$$

となる。$\sum$ を用いず

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k+\cdots$$

という書き方でもよい。

数学的帰納法の形式だけを書いて実際は何も証明していない，間違った証明をする人がいる。この問題の数学的帰納法の部分の間違った「証明」を次に書く。間違いを見つけられない人は，理解している友達か私に質問して下さい。

n 次導関数は $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。
(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \quad = \quad f'(x)=\frac{1}{1+x}=(-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。n に $k+1$ を代入すると

$$f^{(k+1)}(x) \quad = \quad (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$，$f'''(x)=\dfrac{6}{(1-x)^4}$ となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ と予想される。
(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \quad = \quad \frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x)=\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right)' \\ &= k!\frac{-(k+1)(-1)}{(1-x)^{k+2}} \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

が成立する。

0 以上の整数 k に対し $f^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{(1-0)^{k+1}} = k!$, が成立するので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k! x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k
\end{aligned}
$$

となる。

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

という書き方でもよい。

(3) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}$, $f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-2}$,

$f'''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\left(\dfrac{1}{2}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-3}$, となる。$n$ 次導関数は

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\
&= n!\binom{\frac{1}{2}}{n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n}
\end{aligned}
$$

と予想される。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} = 1!\binom{\frac{1}{2}}{1}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = k!\binom{\frac{1}{2}}{k}(1+x)^{\frac{1}{2}-k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると,

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\
&= k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{2}-k}\right)' \\
&= k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{1}{2}-k\right)\left((1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)}\right)
\end{aligned}
$$

となるが

$$
\begin{aligned}
k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{1}{2}-k\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\left(\frac{1}{2}-k\right) \\
&= (k+1)!\frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdots\frac{\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k}\frac{\left(\frac{1}{2}-(k+1)+1\right)}{k+1} \\
&= (k+1)!\binom{\frac{1}{2}}{k+1}
\end{aligned}
$$

となるので

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)!\binom{\frac{1}{2}}{k+1}\left((1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)}\right)$$

が得られ，$k+1$ のときも成立している。よって自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = n!\binom{\frac{1}{2}}{n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(0) = k!\binom{\frac{1}{2}}{k} \quad (k \geq 1)$，$f(0) = 1$ なので $f^{(k)}(0) = k!\binom{\frac{1}{2}}{k} \quad (k \geq 0)$ となる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}k!\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k \end{aligned}$$

となる。

(4)　n 次導関数を計算してもできるが，ここでは異なる方法で求めてみる。 x を $-1 < x < 1$ を満たす実数とする。初項 1 公比 $-x$ の等比数列の和を考えると

$$\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n$$

が成立する。ここで $n \to \infty$ とすると $(-x)^n \to 0$ なので

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^x + \cdots$$

となる。

(5)　n 次導関数を求めなくても，$f^{(n)}(0)$ が求まればよいことに注目する。

$$f(x)(1+x^2) = 1$$

と変形して両辺を n 回微分する。$1+x^2$ は 3 回以上微分すると 0 になることに注意するとライプニッツの定理より

$$f^{(n)}(x)(1+x^2) + {}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}(x)2x + {}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-2)}(x)2 = 0$$

となる。$x = 0$ を代入することにより，$f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ を得る。$f(0) = 1$，$f'(0) = 0$，$f''(0) = 2$ より

$$f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$$

が成立することが予想される。

まず奇数の場合を証明する。即ち「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(2n-1)}(0) = 0$」を示す。

(a) $n = 1$ のとき； $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ なので $f'(0) = 0$ となり，成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する;即ち $f^{(2k-1)}(0)=0$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$ が成立しているので，$n-2=2k-1$ とすると

$$f^{(2k+1)}(0)+(2k+1)2kf^{(2k-1)}(0)=0$$

が得られる。よって $f^{(2(k+1)-1)}(0)=f^{(2k+1)}(0)=0$ となり，$k+1$ のときも成立している。

次に偶数の場合を証明する。即ち「0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(0)=(-1)^n(2n)!$」を示す。

(a) $n=0$ のとき；$f^{(0)}(0)=f(0)=\dfrac{1}{1+0^2}=(-1)^0(2\cdot 0)!$ なので成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(0)=(-1)^k(2k)!$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$ が成立しているので，$n-2=2k$ とすると

$$f^{(2k+2)}(0)+(2k+2)(2k+1)f^{(2k)}(0)=0$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} f^{(2(k+1))}(0) &= -(2k+2)(2k+1)f^{(2k)}(0) \\ &= -(2k+2)(2k+1)(-1)^k(2k)! \\ &= (-1)^{k+1}(2(k+1))! \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立している。

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(0)x^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!}f^{(2k-1)}(0)x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}(-1)^k(2k)!x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \end{aligned}$$

を得る。

別の方法：(4) の

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$$

の x に x^2 を代入して

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(x^2\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$

を得る。

(6)　$f'(x) = 2e^{2x}, f''(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}$ より $f^{(n)}(x) = 2^ne^{2x}$ と予想できる。これを数学的帰納法で証明する。

　$n = 0$ のときは

$$f^{(0)}(x) = e^{2x} = 2^0e^{2x}$$

なので成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = 2^ke^{2x}$ の成立を仮定する。この式の両辺を微分すると

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(2^ke^{2x}\right)' = 2^{k+1}e^{2x}$$

となり $n = k+1$ のときも成立している。よって証明された。

　$f^{(k)}(0) = 2^ke^{2\cdot 0} = 2^k$ より

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}x^k$$

(7)　$f'(x) = 3\cos 3x = 3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f''(x) = 9\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 9\sin\left(3x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$ なので $f^{(n)}(x) = 3^n\sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

　$n = 0$ のときは

$$f^{(0)}(x) = \sin 3x = 3^0\sin\left(3x + \frac{0\pi}{2}\right)$$

なので成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = 3^k\sin\left(3x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。両辺を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(3^k\sin\left(3x + \frac{k\pi}{2}\right)\right)' \\ &= 3^{k+1}\cos\left(3x + \frac{k\pi}{2}\right) = 3^{k+1}\sin\left(3x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となり $n = k+1$ のときも成立している。よって証明された。

　n が偶数のとき $n = 2k$ とおくと

$$f^{(n)}(0) = 3^{2k}\sin\left(3\cdot 0 + \frac{2k\pi}{2}\right) = 3^{2k}\sin(k\pi) = 0$$

となる。n が奇数のとき $n = 2k+1$ とおくと

$$f^{(n)}(0) = 3^{2k+1}\sin\left(3\cdot 0 + \frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 3^{2k+1}\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 3^{2k+1}(-1)^k$$

となる。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k3^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

(8)　$f'(x) = 2\,(2x+3)^{-1}$, $f''(x) = -4\,(2x+3)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 8\cdot 2\,(2x+3)^{-3}$ $f^{(4)}(x) = -16\cdot 6\,(2x+3)^{-4}$ より $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}2^n(n-1)!\,(2x+3)^{-n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

　$n=1$ のときは

$$f^{(1)}(x) = 2\,(2x+3)^{-1} = (-1)^1 2^1(1-1)!\,(2x+3)^{-1}$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}2^k(k-1)!\,(2x+3)^{-k}$ を仮定する。両辺を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1}2^k(k-1)!\,(2x+3)^{-k}\right)' \\ &= (-1)^{k+1}2^k(k-1)!2\cdot(-k)\,(2x+3)^{-k-1} = (-1)^{k+2}3^{k+1}\left((k+1)-1\right)!\,(2x+3)^{-(k+1)} \end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも成立している。よって証明された。

　$k \geq 1$ のとき $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}2^k(k-1)!(2\cdot 0+3)^{-k} = (-1)^{k+1}(k-1)!\dfrac{2^k}{3^k}$ であり，$k=0$ のとき $f^{(0)}(0) = f(0) = \log(2\cdot 0+3) = \log 3$ となる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^n = f^{(0)}(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^n \\ &= \log 3 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(k-1)!\frac{2^k}{3^k}\frac{1}{k!}x^k \\ &= \log 3 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^k}{3^k k}x^k \end{aligned}$$

$$f(x) = a_0 + a_(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

とテーラー展開されているときには $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ である。n 次導関数を求めなくとも何らかの方法で求めてもよい。

　例えば，演習問題 1.21 (2) では等比数列の和から求めることもできる。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

が得られているとき，この式の x に $-x$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \end{aligned}$$

となり (4) を得る。更にこの式に x^2 を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+(x^2)} \\ &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} \cdots \end{aligned}$$

となり (5) を得るがこれはすでに紹介してある。

演習問題 1.22 次の関数を $x=a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。(3) の級数は $-1<x<1$ の範囲で考える。

(1) $f(x)=e^x \quad (a=1)$
(2) $f(x)=\sin x \quad (a=\pi)$
(3) $f(x)=\log x \quad (a=1)$
(4) $f(x)=e^{3x} \quad (a=2)$
(5) $f(x)=x^5 \quad (a=1)$
(6) $f(x)=\sin x \quad \left(a=\dfrac{\pi}{2}\right)$
(7) $f(x)=\cos 2x \quad \left(a=\dfrac{\pi}{2}\right)$

(1) $f(x)=e^x$ とおくと，$f'(x)=e^x$ である。よって何回微分しても

$$f^{(n)}(x)=e^x$$

となる。そこまでやる必要はないかもしれないが，一応数学的帰納法でこの事実を確認しておく。示すべき命題は「$\forall n\in\mathbb{N}\ f^{(n)}(x)=e^x$」である。
(a) $n=1$ のとき $f^{(1)}(x)=f'(x)=e^x$ なので成立している。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}=e^x$ を仮定する。このとき

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^k(x)\right)' \\ &= (e^x)'=e^x \end{aligned}$$

よってテーラー級数は

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(1)(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}(x-1)^k \end{aligned}$$

となる。
(2) $f(x)=\sin x$ とおくと $f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，$f'''(x)=-\cos x$，$f^{(4)}(x)=\sin x$ となり，以下周期 4 で同じものが続く。よって

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x,\qquad f^{(2n-1)}(x)=(-1)^{n+1}\cos x$$

と予想される。

まず偶数の場合を証明する。即ち即ち「0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x$」を示す。
(a) $n=0$ のとき； $f^{(0)}(x)=f(x)=\sin x=(-1)^0\sin x$ なので成立している。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x$ を仮定する。

$$\begin{aligned} f^{2(k+1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k)}(x)\right)'\right)' \\ &= \left(\left((-1)^k\sin x\right)'\right)'=\left((-1)^k\cos x\right)' \\ &= (-1)^k\left(-\sin x\right) \\ &= (-1)^{k+1}\sin x \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立している。

次に奇数の場合を証明する。即ち「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1}\cos x$」を示す。

(a) $n=1$ のとき； $f'(x) = (\sin x)' = \cos x = (-1)^{1+1}\cos x$ なので成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{k+1}\cos x$ を仮定する。

$$
\begin{aligned}
f^{(2(k+1)-1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k-1)}(x)\right)'\right)' \\
&= \left(\left((-1)^{k+1}\cos x\right)'\right)' = \left((-1)^{k+1}(-\sin x)\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(-\cos x) \\
&= (-1)^{(k+1)+1}\cos x
\end{aligned}
$$

となり，$k+1$ のときも成立している。$f^{(2k)}(\pi) = (-1)^k \sin\pi = 0$，$f^{(2k-1)}(\pi) = (-1)^{k+1}\cos\pi = (-1)^{k+1}(-1) = (-1)^k$，なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\pi)(x-\pi)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(\pi)(x-\pi)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} (-1)^k (x-\pi)^{2k-1}
\end{aligned}
$$

を得る。

(3)　$f(x) = \log x$ に対しては，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$，$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$，$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$，となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n=1$ のとき：

$$
f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{x^1}
$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{-k}{x^{k+1}} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{x^{k+1}}
\end{aligned}
$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}
$$

が成立する。

$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k+1}(k-1)!$，および $f(1) = \log 1 = 0$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k \\ &= f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^{k+1}(k-1)!(x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(x-1)^k \end{aligned}$$

となる。

(4)　$f'(x) = 3e^{3x}$, $f''(x) = 3^2 e^{3x}$ より $f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$ と予想できる。これを数学的帰納法で証明する。

$n = 0$ のとき

$$f^{(0)}(x) = e^{3x} = 3^0 e^{3x}$$

より成立している。$n = k$ のとき，即ち $f^{(k)}(x) = 3^k e^{3x}$ の成立を仮定する。両辺を微分すると

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(3^k e^{3x}\right)' = 3^k \cdot 3e^{3x} = 3^{k+1}e^{3x}$$

となるので，$n = k+1$ のときも成立している。よって証明された。$f^{(k)}(2) = 3^k e^{3\cdot 2} = 3^k e^6$ なので

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k e^6}{k!}(x-2)^k$$

(5)　導関数を求めてもよいが，多項式なので

$$\begin{aligned} x^5 &= \Big((x-1)+1\Big)^5 \\ &= 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5 \end{aligned}$$

と 2 項展開してもよい。

(6)　$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f''(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$ なので

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

$n = 0$ のときは

$$f^{(0)}(x) = \sin x = \sin\left(x + \frac{0\pi}{2}\right)$$

なので成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。両辺を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right)' \\ &= \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも成立している。よって証明された。

n が偶数のとき $n=2k$ とおくと

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k$$

となる。n が奇数のとき $n=2k+1$ とおくと

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)=\sin\left((k+1)\pi\right)=0$$

となる。

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\end{aligned}$$

(7) $f'(x)=-2\sin 2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=4\cos\left(2x+\frac{2\pi}{2}\right)$ なので $f^{(n)}(x)=2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

$n=0$ のときは

$$f^{(0)}(x)=\cos 2x=\cos\left(2x+\frac{0\pi}{2}\right)$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=2^k\cos\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。両辺を微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(2^k\cos\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'\\&=2^k(-2)\sin\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)=2^{k+1}\cos\left(2x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも成立している。よって証明された。

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2^n\cos\left(2\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)=2^n\cos\left(\pi+\frac{n\pi}{2}\right)$$

n が偶数のとき $n=2k$ とおくと

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2^{2k}\cos\left(\pi+\frac{2k\pi}{2}\right)=2^{2k}\cos\left(\pi+k\pi\right)=2^{2k}(-1)^{k+1}$$

となる。n が奇数のとき $n=2k+1$ とおくと

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2^{2k+1}\cos\left(\pi+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)=2^{2k+1}\cos\left(\pi+k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

となる。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^{2k}}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

演習問題 ***1.23**　次を示せ。$1 \leq p \leq n$ を満たす実数 p に対し

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。$R_n = \dfrac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$ を**ロシュの剰余項**と呼ぶ。$p = n$ とすると定理 1.25 の剰余項になる。これを**ラグランジェの剰余項**という。$p = 1$ としたものを**コーシーの剰余項**と呼ぶ。

定理 1.25 の証明と少し異なるがほぼ平行に議論が進む。

$$A = \frac{(n-1)!}{(x-a)^p}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$
$$F(t) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + A\frac{(x-t)^p}{(n-1)!}\right)$$

とおくと $F(x) = f(x) - f(x) = 0$,

$$F(a) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)\right) = 0$$

となる。

$$\frac{d}{dt}F(t) = -\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + A\frac{(x-t)^p}{(n-1)!}\right)'$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right) + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!}$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!}$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!}$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= \left(Ap - f^{(n)}(t)(x-t)^{n-p}\right)\frac{(x-t)^{p-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

$F'(a+\theta(x-a)) = 0$ となる θ $(0<\theta<1)$ が存在するので

$$
Ap - f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-(a+\theta(x-a)))^{n-p} = 0
$$

より結論が得られる。

演習問題 ***1.24**　次の関数がテーラー級数展開可能であること，即ち剰余項 R_n に対し $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ が成立することを示せ。最初の 3 つの式は任意の x について成立するが，最後の 2 つには制限がつく。

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \cdots \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + \cdots \quad (-1<x<1) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \quad (-1<x<1)
\end{aligned}
$$

ここではすでにそれぞれの関数の n 次導関数は既知とする。即ち

$$
\begin{aligned}
(e^x)^{(n)} &= e^x \\
(\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
(\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
(\log x)^{(n)} &= (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n} \\
((1+x)^\alpha)^{(n)} &= n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}
$$

は既知とする。また前期の極限の所で扱った

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0
$$

も既知とする。本問では $a=0$ におけるテーラー展開なので剰余項は

$$
R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n
$$

である。

$f(x)=e^x$ のとき，$f(x)$ は単調増加なので $|f^{(n)}(\theta x)|=|e^{\theta x}|\leq e^{|x|}$ が成立するので

$$|R_n|\leq\frac{e^{|x|}|x|^n}{n!}$$

となり $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}|x|^n}{n!}=0$ より $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となる。

$f(x)=\sin x$ のとき $|f^{(n)}(\theta x)|=\left|\sin\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leq 1$ なので

$$|R_n|\leq\frac{|x|^n}{n!}$$

となり $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ より $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となる。

$f(x)=\cos x$ のとき $|f^{(n)}(\theta x)|=\left|\cos\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leq 1$ なので

$$|R_n|\leq\frac{|x|^n}{n!}$$

となり $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ より $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となる。

$f(x)=\log(1+x)$ のとき剰余項としてコーシーの剰余項を採用する。今 $a=0$ なので

$$\begin{aligned}R_n&=\frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}x^n\\&=\frac{(1-\theta)^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{(\theta x+1)^n(n-1)!}x^n\end{aligned}$$

である。$0<\theta<1,-1<x<1$ より $-\theta<\theta x<\theta$ であり，辺々に 1 を加えて $0<1-\theta<1+\theta x$ を得る。よって

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$$

となる。また $1+\theta x>1-|x|>0$ なので

$$\begin{aligned}|R_n|&=\left|\frac{(1-\theta)^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{(\theta x+1)^n(n-1)!}x^n\right|\\&=\frac{|x|^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}<\frac{|x|^n}{1+\theta x}<\frac{|x|^n}{1-|x|}\end{aligned}$$

となるので $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となる。

$f(x)=(1+x)^\alpha$ のときも剰余項としてコーシーの剰余項を採用する。今 $a=0$ なので

$$\begin{aligned}R_n&=\frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}x^n\\&=\frac{(1-\theta)^{n-1}n!\binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}}{(n-1)!}x^n\end{aligned}$$

$$= n\binom{\alpha}{n}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-1}$$

である。$\alpha \geq 1$ のとき $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq (1+|x|)^{\alpha-1}$ であり，$\alpha < 1$ のとき $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq (1-|x|)^{\alpha-1}$ のなのでいずれの場合も θ に関係のない定数 M で $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq M$ とできる。また全問と同様に $0 < \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ が成立するので，

$$|R_n| \leq n\binom{\alpha}{n}|x|^n$$

となる。$c_n = n\binom{\alpha}{n}|x|^n$ と置くとき $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ が示されれば証明が終わる。ここで後で証明するが，次の結果を使う。

$\{c_n\}$ に対し $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = c$ が存在して $0 \leq c < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ である。

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\alpha-n}{n}|x|$$

なので $0 \leq \lim_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = |x| < 1$ となる。

最後に途中で使った結果を示す。$c < 1$ なので $\varepsilon = \dfrac{1-c}{2}$ に対しある自然数 N が存在して任意の自然数 n に対し

$$n > N \implies \left|\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} - c\right| < \varepsilon$$

が成立する。このとき $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} - c < \varepsilon$ より $|c_{n+1}| < (c+\varepsilon)|c_n|$ となる。$d = c+\varepsilon$ とおくと $0 < d < 1$ であり $|c_{n+1}| < d|c_n|$ が成立している。よって $n > N$ となる n に対し $|c_n| < d^{n-N}|c_N|$ が成立するので $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ となる。

演習問題 ***1.25**　次の関数は何回でも微分可能であるが，$x = 0$ でテーラー級数展開可能でないことを次にしたがって示せ。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

(1) $g(t)$ を n 次の多項式とするとき $\lim_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{e^t} = 0$ が成立することを n に関する数学的帰納法で示せ ($n = 0$ から始めること)。

(2) $f^{(n)}(x)$ はある多項式 $P_n(t)$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

と表されることを n に関する数学的帰納法で示せ ($n = 0$ から始めること)。

(3) $f(x)$ が $x = 0$ でテーラー級数展開可能だと仮定すると矛盾することを示せ。

(1)　$n=0$ のとき 0 次式は定数なので $g(t)=a$ とする。$\lim_{t\to\infty}\frac{a}{e^t}=0$ なので成立している。

$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち k 次式 $g(t)$ に関しては $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{e^t}=0$ が成立していることを仮定する。$g(t)$ を任意の $k+1$ 次式とする。ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{g'(t)}{(e^t)'}=\lim_{t\to\infty}\frac{g'(t)}{e^t}$$

となるが $g'(t)$ は k 次式なので $\lim_{t\to\infty}\frac{g'(t)}{e^t}=0$ である。よって $k+1$ のときも成立し，数学的帰納法により 0 以上のすべての整数で成立する。

(2)　$n=0$ のときは $f^{(0)}(x)=f(x)$ なので $P_0(t)=1$ とおくと成立している。

$n=k$ での成立を仮定する。$x>0$ では $f^{(k)}(x)=P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ となっているので，$x>0$ のときは

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}+P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\\&=\frac{1}{x^2}\left(-P_k'\left(\frac{1}{x}\right)+P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

となるので $P_{k+1}(t)=t^2\left(-P_k'(t)+P_k(t)\right)$ とおくと $f^{(k+1)}(x)=P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ となっている。

$x<0$ のときは $f^{(k)}(x)=0$ なので $f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=0$ である。

$x=0$ のとき

$$\begin{aligned}f_+^{(k+1)}(0)&=\lim_{h\to+0}\frac{f^{(k)}(h)-f^{(k)}(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f^{(k)}(h)}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}P_k\left(\frac{1}{h}\right)e^{-\frac{1}{h}}\qquad(\text{ここで } t=\frac{1}{h} \text{ とおく})\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{tP_k(t)}{e^t}\end{aligned}$$

となるが $tP_k(t)$ は多項式なので極限値は 0 になる。一方

$$f_-^{(k+1)}(0)=\lim_{h\to-0}\frac{f^{(k)}(h)-f^{(k)}(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{0-0}{h}=0$$

となるので $f^{(k+1)}(0)=f_+^{(k+1)}(0)=f_-^{(k+1)}(0)=0$ となる。以上で $k+1$ のときの成立が示されたので，数学的帰納法により 0 以上の整数で成立する。

(3)　(2) で示したことからすべての 0 以上の整数 n に対し $f^{(n)}(0)=0$ が成立している。$f(x)$ が $x=0$ でテーラー級数展開可能だと仮定すると

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{0}{k!}x^k=0$$

となり恒等的に 0 になるが $f(x)$ はそうでないので矛盾。よってテーラー級数展開可能ではない。

演習問題 1.26　　テーラー級数を用いて次の極限値を求めよ。それぞれの関数のテーラー級数は既知としてよい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

(1)

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}x\cos x &= x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 - \cdots\\ \sin x - x\cos x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots - \left(x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 - \cdots\right)\\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots\\ \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{30}x^2 + \cdots\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

である。

(2)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

なので

$$\frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}x + \frac{1}{4!}x^2 + \cdots$$

$x\to\infty$ のとき第 1 項，第 2 項は $\to 0$ だが，第 4 項以降はすべて $\to\infty$ で，各項の和なので

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \infty$$

(3)

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\\ \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} &= \frac{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots - \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots} \\
&= \frac{2x + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots} = \frac{2 + \frac{2}{3!}x^2 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots}
\end{aligned}
$$

なので

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} = 2$$

(4)

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}x^2 + \cdots$$

より

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \cdots\right)}{x} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}x + \cdots
\end{aligned}
$$

なので

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

(5)

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

より

$$\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \cdots$$

なので

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(6)

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$$

より

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{120}\frac{1}{x^5} - \cdots$$

なので

$$x \sin \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{6} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{120} \frac{1}{x^4} - \cdots$$

となる。よって

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$