

2 多変数関数の微分 (偏微分)

演習問題 *2.1 次の D に対し ∂D を求めよ。

- (1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
 (2) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, -2 < y < \sin \frac{1}{x} \right\}$
 (3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$

D の内点全体の集合を I , 外点全体の集合を X とする。 $O = (0, 0)$ を原点とする。

(1) $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ であることを示す。そのために $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ を示せばよい。

$J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とおき, $P = (x, y)$ を J の任意の点とする。このとき $x^2 + y^2 < 1$ なので $\varepsilon = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと $\varepsilon > 0$ である。 $U_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(Q, P) < \varepsilon\}$ とおく。 $Q = (x', y')$ を $U_\varepsilon(P)$ の任意の点とする

$$x'^2 + y'^2 = d(Q, O) \leq d(Q, P) + d(P, O) < \varepsilon + \sqrt{x^2 + y^2} < 1$$

となるので $U_\varepsilon(P) \subseteq D$ が成立する。よって P は D の内点であり, $P \in I$ が成立する。

逆に $P = (x, y)$ を D の内点 (即ち $P \in I$) とすると, ある正の実数 ε が存在して $U_\varepsilon(P) \subseteq D$ となる。 $P = O = (0, 0)$ のときは $P \in J$ なので $d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ とする。

このとき

$$Q = (x', y') = \left(x + \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, y + \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

とおくと $d(P, Q) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より $Q \in U_\varepsilon(P) \subseteq D$ である。

$$\begin{aligned} d(Q, O) &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left(x + \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(y + \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + y^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= d(P, O) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

$d(Q, O) \leq 1$ より $d(P, O) < 1$ となり, $P \in J$ となる。よって $I = J$ が示された。

$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ とおく。 $P = (x, y)$ を K の任意の点とする。 $d(P, O) > 1$ なので $\varepsilon = d(P, O) - 1$ とおくと $\varepsilon > 0$ である。 $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ であることを示せば, P は D の外

点になり, $K \subseteq X$ が示される。 $Q = (x', y')$ を $U_\varepsilon(P)$ の任意の点とする。 $d(P, Q) < \varepsilon$ なので

$$1 + \varepsilon = d(P, O) \leq d(P, Q) + d(Q, O) < \varepsilon + d(Q, O)$$

より $1 < d(Q, O)$ となる。 よって $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ である。

逆に P を D の外点とする。 ある正の実数 ε が存在して $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ となっている。

このとき

$$Q = (x', y') = \left(x - \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, y - \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

とおくと $d(P, Q) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より $Q \in U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ である。

$$\begin{aligned} d(Q, O) &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left(x - \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(y - \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + y^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= d(P, O) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

$d(Q, O) > 1$ より $d(P, O) > 1$ となり, $P \in K$ となる。 よって $X = K$ が示された。

$$(2) \quad L_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = \sin \frac{1}{x} \right\}, L_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, -2 < y \leq \sin 1 \right\},$$

$$L_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = -2 \right\}, L_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -2 \leq y \leq 1 \right\},$$

$E = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ とおくとき, $\partial D = E$ であることを示す。

最初に D の点は D の内点であることを示す。 $P = (x_0, y_0) \in D$ とする。

$$\varepsilon_1 = y_0 - (-2), \varepsilon_2 = x_0, \varepsilon_3 = 1 - x_0, \varepsilon_4 = \inf \left\{ d \left((x, \sin \frac{1}{x}), (x_0, y_0) \right) \mid 0 < x \leq 1 \right\} \text{ とおく。}$$

n を $\frac{1}{(2n - \frac{1}{2})\pi} < x_0$ を満たす自然数とすると

$$\varepsilon_4 = \inf \left\{ d \left((x, \sin \frac{1}{x}), (x_0, y_0) \right) \mid \frac{1}{(2n - \frac{1}{2})\pi} \leq x \leq 1 \right\}$$

が成立するが, 最大値定理より

$$\varepsilon_4 = \min \left\{ d \left((x, \sin \frac{1}{x}), (x_0, y_0) \right) \mid \frac{1}{(2n - \frac{1}{2})\pi} \leq x \leq 1 \right\}$$

が成立するので $\varepsilon_4 > 0$ である。

$$\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \}$$

とおくと

$$U_\varepsilon(P) \subseteq D$$

が成立するので P は D の内点である。逆に P を D の内点とすると、ある正の実数 ε が存在して $U_\varepsilon(P) \subseteq D$ となるので $P \in D$ である。よって $I = D$ である。

$K = \mathbb{R}^2 - D - E$ とおくと、 $X = K$ を示す。 $P = (x_0, y_0) \in K$ とすると (1) $y_0 < -2$ 、または (2) $x_0 < 0$ 、または (3) $x_0 > 1$ 、または (4) $0 < x_0 \leq 1$ かつ $y_0 > \sin \frac{1}{x_0}$ 、(5) $x_0 = 0$ かつ $y_0 > 1$ が成立している。

(1) のときは $\varepsilon = |y_0 - (-2)|$ とおくと $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ となっている。(2) のときは $\varepsilon = |x_0 - 0|$ とおくと $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ となっている。(3) のときは $\varepsilon = |x_0 - 1|$ とおくと $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ となっている。

(4) のときは $\varepsilon = \inf \left\{ d \left(\left(x, \sin \frac{1}{x} \right), (x_0, y_0) \right) \mid 0 < x \leq 1 \right\}$ とおく。 n を $\frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} < x_0$ を満たす自然数とすると

$$\varepsilon = \inf \left\{ d \left(\left(x, \sin \frac{1}{x} \right), (x_0, y_0) \right) \mid \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} \leq x \leq 1 \right\}$$

が成立するが、最大値定理より

$$\varepsilon = \min \left\{ d \left(\left(x, \sin \frac{1}{x} \right), (x_0, y_0) \right) \mid \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} \leq x \leq 1 \right\}$$

が成立するので $\varepsilon > 0$ である。

$$U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$$

が成立するので P は D の外点である。

(5) のときは $y_0 - 1 = \varepsilon$ とおくと $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$ となるので外点である。

逆に D の外点は K に含まれることを示せば $X = K$ が分かる。 D は D の内点なので外点ではない。よって L_1, L_2, L_3, L_4 が外点でないことを示せばよい。 ε を任意の正の実数とする。

$P = (x_0, y_0) \in L_1$ とする $x = x_0, y = \max \left\{ y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$ とおく。 $Q = (x, y)$ とすると $Q = (x, y) \in D$ となる。

$$d(P, Q) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので $Q \in U_\varepsilon(P)$ となり、よって P は外点でない。

$P = (x_0, y_0) \in L_2$ とする。 $y_0 = \sin 1$ のときは $x = \max \left\{ x_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right\}, y = \max \left\{ y_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2} \right\}$ とおく。 $y_0 \neq \sin 1$ のときは $x = \max \left\{ x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} \right\}, y = y_0$ とおく。 $Q = (x, y) \in D$ となる。

$$d(P, Q) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので $Q \in U_\varepsilon(P)$ となり、よって P は外点でない。

$P = (x_0, y_0) \in L_3$ とする。 $x_0 = 1$ のときは $x = \max \left\{ x_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right\}, y = \min \left\{ y_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2} \right\}$ とおく。 $x_0 \neq 1$ のときは $x = x_0, y = \min \left\{ y_0 + \frac{\varepsilon}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$ とおく。 $Q = (x, y)$ とすると $Q = (x, y) \in D$ となる。

$$d(P, Q) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので $Q \in U_\varepsilon(P)$ となり, よって P は外点でない。

$P = (x_0, y_0) \in L_4$ とする。 $y_0 = -2$ のときは $x = \max \left\{ x_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right\}, y = \min \left\{ y_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2} \right\}$ とおく。 $-2 < y_0 < -1$ のときは $x = \min \left\{ x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} \right\}, y = y_0$ とおく。 $y_0 = -1$ のときは $x = \min \left\{ x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} \right\}, y = \min \left\{ y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$ とおく。 $-1 < y_0 < 1$ のとき次のような数列 $\{\alpha_n\}$ が存在する; $\{\alpha_n\}$ は (1) 0 に収束する単調減少数列であり, (2) $(\alpha_n, y_0) \in D$ を満たす。このことを示すのは最後にまわして, これを使って議論を進める。 α_n は 0 に収束するので, $0 < \alpha_n < \varepsilon$ となる n が存在する。このとき $x = \alpha_n, y = y_0$ とおく。 $y_0 = 1$ のとき $y_1 = \max \left\{ y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ とすると, $-1 < y_1 < 1$ なので y_1 に対し $\{\alpha_n\}$ と同じ性質をもつ数列 $\{\beta_n\}$ が存在する。この β_n に対し $0 < \beta_n < \frac{\varepsilon}{2}$ を満たす自然数 n が存在する。このとき $x = \beta_n, y = y_1$ とする。 $Q = (x, y)$ とすると $Q = (x, y) \in D$ となる。

$$d(P, Q) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので $Q \in U_\varepsilon(P)$ となり, よって P は外点でない。

以上により $\partial D = E$ である。

残っている (1) 0 に収束する単調減少数列であり, (2) $(\alpha_n, y_0) \in D$ を満たす数列 $\{\alpha_n\}$ の存在を示す。

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sin \frac{1}{x} = y_0, 0 < x < 1 \right\}$$

とする。 $\frac{1}{x} = X$ とおくと $A = \left\{ \frac{1}{X} \in \mathbb{R} \mid \sin X = y_0, X > 0 \right\}$ と表されるので A は空集合ではない。 $\sin \frac{1}{x} = y_0$ のとき

$$\sin \frac{1}{x} = \sin \left(\frac{1}{x} + 2n\pi \right) = \sin \left(\frac{1 + 2n\pi x}{x} \right) = \sin \left(\frac{1}{\frac{1 + 2n\pi x}{x}} \right)$$

となるので $x \in A$ ならば $\frac{1}{\frac{1 + 2n\pi x}{x}} \in A$ である。言い換えると A の中にはいくらでも 0 に近い元が存在する。よって A の元すべてを大きい順に

$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \dots$$

と番号付ける。

$$K_n = \{ (x, y_0) \mid \beta_{n+1} < x < \beta_n \}$$

とおくと, 任意の自然数 n に対し $K_{2n-1} \subseteq D$ が成立するが, または任意の自然数 n に対し $K_{2n} \subseteq D$ が成立する。前者の場合は $\beta_{2n} < \alpha_n < \beta_{2n-1}$, 後者の場合は $\beta_{2n+1} < \alpha_n < \beta_{2n}$ を満たすように α_n を決めると求めるものが得られる。

(3) $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$ とおくと $\partial D = E$ を示す。「普通」の集合 D の場合 ∂D は 1 次元的であるが, この例では ∂D が 2 次元的になっている。 E の任意の点 P が境界点であることを示す。そのために任意の正の実数 ε に対し $U_\varepsilon(P)$ は D に含まれる点も D に含まれない点も含むことを示す。

実数に対しいくらでも近くに有理数が存在する。きちんと書くと

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{Q} \quad |x - q| < \varepsilon$$

が成立する。これを用いると

$$\forall P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists Q = (x', y') \in \mathbb{Q}^2 \quad d(P, Q) < \varepsilon$$

の成立が分かる。

また実数に対しいくらでも近くに無理数が存在する。きちんと書くと

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad |x - q| < \varepsilon$$

が成立する。これを用いると

$$\forall P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists Q = (x', y') \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \quad d(P, Q) < \varepsilon$$

の成立が分かる。この2つを用いると $P = (x, y) \in E$ と任意の正の実数 ε に対し

$$\exists Q = (x', y') \in D \quad d(P, Q) < \varepsilon, \quad \exists R = (x'', y'') \notin D \quad d(P, R) < \varepsilon$$

が示される。

演習問題 **2.2 定理 2.4 を証明せよ。

$P = (x, y), P_0 = (a, b)$ とする。 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$ の定義は

$$\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R} \quad \exists \delta (> 0) \in \mathbb{R} \quad \forall P \quad 0 < d(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - A| < \varepsilon$$

が成立することである。ここで $d(P, P_0) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ である。

$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A, \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = B$ とする。

(1) 1) $\varepsilon > 0$ を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して、任意の P に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して、任意の P に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |g(P) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。このとき $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおく。 $0 < d(P, P_0) < \delta$ のとき

$$\begin{aligned} |f(P) + g(P) - (A + B)| &= |(f(P) - A) + (g(P) - B)| \\ &\leq |f(P) - A| + |g(P) - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる。

2) $k = 0$ の場合は $kf(P)$ は恒等的に 0 なので成立している。よって $k \neq 0$ とする。任意の正数 ε に対して上の様な δ が存在するので、特に $\frac{\varepsilon}{|k|}$ に対し $\delta > 0$ が存在して $0 < d(P, P_0) < \delta$ ならば $|f(P) - A| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ を満たす。このとき

$$|kf(P) - kA| = |k(f(P) - A)| = |k| \cdot |f(P) - A| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

となるので証明された。

3) 1 に対しある正数 δ_0 が存在し、任意の P に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_0 \implies |f(P) - A| < 1$$

が成立している。このとき $M = \max\{|A+1|, |A-1|\}$ とおくと $0 < d(P, P_0) < \delta_0$ のとき $|f(P)| \leq M$ が成立する。

最初に $B = 0$ の場合を考える。 ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の P に対し $0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |g(P)| < \frac{\varepsilon}{M}$ が成立する。 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ とおくと、任意の P に対し $0 < d(P, P_0) < \delta$ のとき

$$\begin{aligned} |f(P)g(P) - AB| &= |f(P)g(P)| = |f(P)| \cdot |g(P)| \\ &< M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。この場合は証明された。

よって $B \neq 0$ とする。 ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の P に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して任意の P に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |g(P) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ とおく。 $0 < d(P, P_0) < \delta$ となる P に対し

$$\begin{aligned} |f(P)g(P) - AB| &= |f(P)g(P) - f(P)B + f(P)B - AB| \\ &\leq |f(P)g(P) - f(P)B| + |f(P)B - AB| \\ &= |f(P)| \cdot |g(P) - B| + |f(P) - A| \cdot |B| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|B|} |B| = \varepsilon \end{aligned}$$

となり、この場合も成立する。

4) $B \neq 0$ のとき

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{1}{g(P)} = \frac{1}{B}$$

を示せば、3) と組み合わせて 4) が証明される。

ε として $\frac{|B|}{2}$ をとると、正数 δ_1 が存在して、 $0 < d(P, P_0) < \delta_1$ のとき、

$$|g(P) - B| < \frac{|B|}{2}$$

が成立する。このとき $|g(P)| > \frac{|B|}{2}$ が成立する。

任意の ε に対して, $g(P)$ は B に収束するので, ある正数 δ_2 が存在して, $0 < d(P, P_0) < \delta_2$ となる任意の P に対し

$$|g(P) - B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。このとき $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < d(P, P_0) < \delta$ となる任意の P に対し

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(P)} - \frac{1}{B} \right| &= \left| \frac{B - g(P)}{g(P)B} \right| = \frac{|B - g(P)|}{|g(P)| \cdot |B|} \\ &< \frac{2|B - g(P)|}{|B|^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。

(2) 結論が成立しないと仮定すると, $A > B$ が成立している。 $\varepsilon = \frac{A - B}{2}$ とおくと $\varepsilon > 0$ なので $\delta_1 > 0$ が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |f(P) - A| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < f(P) - A < \varepsilon \\ &\implies A - \varepsilon < f(P) < A + \varepsilon \\ &\implies A - \frac{A - B}{2} < f(P) < A + \frac{A - B}{2} \\ &\implies \frac{A + B}{2} < f(P) < A + \frac{A - B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき $\frac{A + B}{2} < f(P)$ が成立している。

また $\delta_2 > 0$ が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |g(P) - B| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |g(P) - B| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < g(P) - B < \varepsilon \\ &\implies B - \varepsilon < g(P) < B + \varepsilon \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(P) < B + \frac{A - B}{2} \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(P) < \frac{A + B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき $g(P) < \frac{A + B}{2}$ が成立している。 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < d(P, P_0) < \delta$ となる P に対し

$$g(P) < \frac{A + B}{2} < f(P)$$

が成立する。これは矛盾，よって結論が正しいことが示される。

(3) 任意の正数 ε に対し，ある δ_1 が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \varepsilon$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |h(P) - A| < \varepsilon$$

が成立する。 $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ とおくと P が $0 < d(P, P_0) < \delta$ を満たすとき

$$A - \varepsilon < f(P) \leq g(P) \leq h(P) < A + \varepsilon$$

が成立するので $|g(P) - A| < \varepsilon$ が成立する。よって $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = A$ である。

演習問題 2.3 次の極限值が存在するかどうかを調べ，存在するときは極限值を求めよ。

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y - 1}$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

(4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}$

(5) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$

(1) 分母の極限は 0 ではないので

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y - 1} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2 + 2)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y - 1)} = \frac{2}{-1} = -2$$

(2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と $r \rightarrow 0$ は同じである。ただし θ は任意に変化可能である。

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{r^2} = r (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

となる。 $|\cos \theta| \leq 1, |\sin \theta| \leq 1$ より

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq r |\cos^3 \theta + \sin^3 \theta| \leq r (|\cos^3 \theta| + |\sin^3 \theta|) \leq 2r$$

よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$ である。

(3) $x = 1 + r \cos \theta, y = 1 + r \sin \theta$ とおくと $(x, y) \rightarrow (1, 1)$ と $r \rightarrow 0$ は同じである。

$$\frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

となるので (2) と同様に

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$$

となる。

(4) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおく。

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r \cos^3 \theta + r \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}$$

分子は (2) と同様に

$$|r \cos^3 \theta + r \sin^3 \theta| \leq 2r$$

となる。分母は

$$\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta = 1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

とできるので $-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$ より

$$\frac{1}{2} \leq \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta \leq \frac{3}{2}$$

これより

$$0 < \frac{1}{\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta} \leq 2$$

が成立する。よって

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \right| \leq 4r$$

となるので極限值は 0 である。

(5) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおく。

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}$$

$\theta = 0$ として $r \rightarrow 0$ とすると極限值は 1 であり, $\theta = \frac{\pi}{4}$ として $r \rightarrow 0$ とすると極限值は $\frac{2}{3}$ であ

る。よって $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ は存在しない。

演習問題 *2.4 定理 2.8 を証明せよ。

D を有界閉領域とし, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ を連続な関数とする。1 変数の証明と同様に最初に f が有界であることを示す。そのために f が有界でないと仮定する。任意の自然数 n に対し D の点 $P_n = (x_n, y_n)$ で $f(P_n) > n$ となる点が存在する。 $A = \{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と置く。収束する部分数列を以下の様を選ぶ。ここで長方形領域に対し次の記法を定義する。

$$R(a, b, c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

D は有界なのである長方形領域 $R(a, b, c, d)$ で $D \subseteq R(a, b, c, d)$ となるものが存在する。 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d, \alpha(1) = 1$ とする。 $e_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, f_1 = \frac{c_1 + d_1}{2}$ と置き, $R(a, b, c, d)$ を 4 つの長方形領域

$$R(a_1, e_1, c_1, f_1), \quad R(a_1, e_1, f_1, d_1), \quad R(e_1, b_1, c_1, f_1), \quad R(e_1, b_1, f_1, d_1)$$

に分けると、4つのどれかは A の点を無限個含んでいる。無限個含んでいるものを選び、その頂点を a_2, b_2, c_2, d_2 とする。例えば $R(a_1, e_1, c_1, f_1)$ が選ばれたときは $a_2 = a_1, b_2 = e_1, c_2 = c_1, d_2 = f_1$ とする。また $R(a_2, b_2, c_2, d_2)$ に含まれる D の点で $n > \alpha(1)$ となるものが存在するので、その点を $P_{\alpha(2)}$ とする。この操作を続けることにより点列 $\{P_{\alpha(n)}\}$ が定まる。 a_n, c_n は上に有界な単調増加数列であり、 b_n, d_n は下に有界な単調減少数列である。

$$a_n \leq x_{\alpha(n)} \leq b_n, \quad c_n \leq y_{\alpha(n)} \leq d_n$$

であり、

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a), \quad d_n - c_n = \frac{1}{2^{n-1}}(d - c)$$

なので $x_{\alpha(n)}, y_{\alpha(n)}$ は収束する。よって $P_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\alpha(n)}$ とおくと、 D が閉集合ということから $P_0 \in D$ が分かる。どうしてかという、 $\forall \varepsilon > 0$ に対し $d(P_{\alpha(n)}, P_0) < \varepsilon$ となる点 $P_{\alpha(n)}$ が存在するので、 P_0 は D の外点ではない。よって P_0 は D の内点か境界点である。内点ならば $P_0 \in D$ であるし、境界点ならば、閉集合ということから $\partial D \subseteq D$ となるので、やはり $P_0 \in D$ である。 f は連続なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_{\alpha(n)}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\alpha(n)}) = f(P_0)$$

となるが、 $f(P_{\alpha(n)}) > \alpha(n) \geq n$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_{\alpha(n)}) = \infty$ となる。これは矛盾なので、最初の「有界でない」という仮定が正しくない。よって有界が証明された。

$X = \{f(P) \mid P \in D\}$ とおくと X は有界なので上限 $M = \sup X$ が存在する。 $f(P) = M$ となる点 P が存在すれば P は最大値を与えるので、 $f(P) = M$ となる点 P が存在しないとする。このとき $g(P) = \frac{1}{M - f(P)}$ は D で定義される連続関数であるが上に有界でない。これは示したことに矛盾するので、 $f(P) = M$ となる点 P は存在する。これが最大値を与える。

演習問題 2.5 上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求め、原点において偏微分可能であることを確認せよ。

$z = f(x, y)$ が原点において連続であるとは $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ が成立することである。原点で連続でないことを示すには、この極限が存在しないか、存在しても $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ でないことを示せばよい。

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ において極座標で考える。 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と $r \rightarrow 0$ は同値である。 $f(x, y) = \frac{r \cos \theta r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$ となるので極限値は θ に依存する。たとえば $\theta = 0$ のときは 0 であるが $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときは $\frac{1}{2}$ である。2変数の極限の定義よりこれは収束しない。よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続ではない。偏導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0k}{0^2 + k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0 \end{aligned}$$

である。

演習問題 2.6 $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能のとき $f(x, y)$ は (a, b) で偏微分可能であり, $A = f(a, b), B = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), C = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ となることを示せ。

$$f(a+h, b+k) = A + Bh + Ck + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

において $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ とすると $f(a, b) = A$ が得られる。

$f(a+h, b+k)$ に $k=0$ を代入すると,

$$f(a+h, b) = f(a, b) + Bh + \varepsilon(h, 0)\sqrt{h^2 + 0^2}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Bh + \varepsilon(h, 0)\sqrt{h^2 + 0^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(B + \varepsilon(h, 0)\frac{|h|}{h} \right) = B \end{aligned}$$

f は x に関して偏微分可能であり, $f_x(a, b) = B$ となる。

$f(a+h, b+k)$ に $h=0$ を代入すると,

$$f(a, b+k) = f(a, b) + Ck + \varepsilon(0, k)\sqrt{0^2 + k^2}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Ck + \varepsilon(0, k)\sqrt{0^2 + k^2}}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(C + \varepsilon(0, k)\frac{|k|}{k} \right) = C \end{aligned}$$

f は y に関して偏微分可能であり, $f_y(a, b) = C$ となる。

演習問題 *2.7 定理 2.11 を証明せよ。

f_x が連続であるとする。

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b)$$

と変形して 1 変数の結果を使う。 $\varepsilon_1(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)}{h} - f_x(a, b+k)$ とおくと

$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h, k) = 0$ であり, $\varepsilon_1(k) = \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} - f_y(a, b)$ とおくと $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_1(k) = 0$ である。

また f_x は連続なので $\delta(k) = f_x(a, b+k) - f_x(a, b)$ とおくと $\lim_{k \rightarrow 0} \delta(k) = 0$ である。このとき

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) &= \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{f_x(a, b+k)h + \varepsilon_1(h, k)h + f_y(a, b)k + \varepsilon_1(k)k - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{f_x(a, b)h + \delta(k)h + \varepsilon_1(h, k)h + \varepsilon_1(k)k - f_x(a, b)h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{\delta(k)h + \varepsilon_1(h, k)h + \varepsilon_1(k)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

が成立する。

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1, \quad \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$$

が成立するので

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h, k)| &\leq \left| \frac{\delta(k)h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{\varepsilon_1(h, k)h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{\varepsilon_1(k)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\leq |\delta(k)| \left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + |\varepsilon_1(h, k)| \left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + |\varepsilon_1(k)| \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\leq |\delta(k)| + |\varepsilon_1(h, k)| + |\varepsilon_1(k)| \end{aligned}$$

となり $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$ が示される。

演習問題 2.8 演習問題 2.5 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

$f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であることの定義は

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくとき $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立することである。

$(x, y) = (0, 0)$ のとき

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) &= \frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{hk}{h^2 + k^2} - 0 - 0h - 0k \\ &= \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

となる。 $h = r \cos \theta, k = r \sin \theta$ とおくと

$$\varepsilon(h, k) = \frac{r \cos \theta r \sin \theta}{((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2)\sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{r}$$

となる。 $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ と $r \rightarrow 0$ は同値でなので $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r}$ となる。これは収束しないので f は $(0, 0)$ において全微分可能ではない。

全微分可能な関数は連続であるので、そのことを使って別解もある。まずある点で全微分可能な関数はその点で連続であることを示す。 $z = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能のとき

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくとき $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立している。この式は

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

となる。このとき

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) = f(a, b)$$

となるので (a, b) で連続である。

よって問題の関数が $(0, 0)$ で全微分可能であるとすると $(0, 0)$ で連続である。しかし演習問題 2.5 よりこの関数は $(0, 0)$ で連続ではない。よって全微分可能ではない。