

演習問題 *2.25 定理 2.23 を証明せよ。

(a, b) の近傍を $U = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \right\}$ とする。これから考える点はすべてこの近傍に含まれているとする。

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) \quad (1)$$

とおく。 $F(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$ とおくと $\Delta = F(a+h) - F(a)$ である。また $F'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x, b)$ が成立する。平均値の定理を $F(x)$ に適用すると

$$F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} \Delta &= F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta h) \\ &= h(f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)) \end{aligned}$$

さらに平均値の定理を適用すると

$$= hkf_{xy}(a+\theta h, b+\theta'k) \quad (0 < \theta' < 1)$$

となる。 f_{xy} は連続なので

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} = f_{xy}(a, b) \quad (2)$$

が成立する。

また

$$\frac{\Delta}{hk} = \frac{1}{h} \left(\frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \right)$$

より $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk} = \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h}$ となる。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk}$ なので $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk}$ は収束し

$$\begin{aligned} f_{yx}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} \\ &= f_{xy}(a, b) \end{aligned}$$

となる。

演習問題 2.26 定理 2.23 を仮定して次を示せ。

(1) $z = f(x, y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}, \quad z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy}$$

が成立する。

(2) * $z = f(x, y)$ が C^n 級ならば

$$z_{\dots xy \dots} = z_{\dots yx \dots}$$

が成立する。ただし \dots 部分は同じとし、微分は全部で n 回されるものとする。

(3) * $z = f(x, y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x, y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

(1) z が C^3 級するとき、 z_x および z_y は C^2 級である。 z_x に系を適用すると

$$z_{xxy} = (z_x)_{xy} = (z_x)_{yx} = z_{xyx}$$

が得られる。 z_y に系を適用すると

$$z_{yxy} = (z_y)_{xy} = (z_y)_{yx} = z_{yyx}$$

z は C^3 級であるから、 C^2 級でもある。よって系より $z_{xy} = z_{yx}$ が成立する。よって

$$z_{xyx} = (z_{xy})_x = (z_{yx})_x = z_{yxx}$$

$$z_{xyy} = (z_{xy})_y = (z_{yx})_y = z_{yyx}$$

となる。

(2) * α, β を x と y からなる列とする。ただし α は k 個の x, y から、 β は $n - k - 2$ 個の x, y からできているとする。ただし $k \leq n - 2$ とする。ここで証明すべきことは

$$z_{\alpha xy \beta} = z_{\alpha yx \beta}$$

である。

z_α は z を k 回微分したもののなので C^{n-k} 級である。 $n - k \geq 2$ なので系が適用できる。このとき

$$(z_\alpha)_{xy} = (z_\alpha)_{yx}$$

が成立する。よって

$$z_{\alpha xy} = (z_\alpha)_{xy} = (z_\alpha)_{yx} = z_{\alpha yx}$$

が成立する。これより

$$z_{\alpha xy \beta} = (z_{\alpha xy})_\beta = (z_{\alpha yx})_\beta = z_{\alpha yx \beta}$$

の成立が示される。

(3) * γ を x と y からなる列で、 x が k 個、 y が $n - k$ 個からなるとする。 ω を

$$\omega = \underbrace{x \cdots x}_{k \text{ 個}} \underbrace{y \cdots y}_{n-k \text{ 個}}$$

となる列とするとき

$$z_\gamma = z_\omega$$

を示せばよい。 γ が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含まなければ, $\gamma = \omega$ なので $z_\gamma = z_\omega$ が成立する。 γ が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含んだとする。 $\gamma = \alpha y x \beta$ と表記したとき $\gamma_1 = \alpha x y \beta$ とおく。このとき (2) の結果より $z_\gamma = z_{\gamma_1}$ が成立している。 γ_1 が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含まなければ $\gamma_1 = \omega$ となっているので, $z_\gamma = z_{\gamma_1} = z_\omega$ となり, 命題は示される。 γ_1 が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含んだとする。 $\gamma_1 = \alpha_1 y x \beta_1$ と表記したとき $\gamma_2 = \alpha_1 x y \beta_1$ とおく。このとき (2) の結果より $z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2}$ が成立している。 γ_2 が $\cdots yx \cdots$ という部分列を含まなければ, $\gamma_2 = \omega$ なので $z_\gamma = z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2} = z_\omega$ が成立する。このことを続けていくことによりいつかは ω になる。即ち列 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ が存在して $\gamma_t = \omega$ となるのが分かる。(2) より任意の k に対し $z_{\gamma_k} = z_{\gamma_{k+1}}$ が成立するので

$$z_\gamma = z_{\gamma_1} = \cdots = z_{\gamma_t} = z_\omega$$

が成立する。

演習問題 2.27 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ とおき, $F(t)$ に 1 変数のテーラーの定理を適用することにより定理 2.26 を証明せよ。

$$\begin{aligned} F'(t) &= h \frac{\partial}{\partial x} f(a + ht, b + kt) + k \frac{\partial}{\partial y} f(a + ht, b + kt) \\ &= Df(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

となる。更に t で微分すると

$$\begin{aligned} F''(t) &= h \frac{\partial}{\partial x} Df(a + ht, b + kt) + k \frac{\partial}{\partial y} Df(a + ht, b + kt) \\ &= D^2 f(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

となる。任意の自然数 n に対し

$$F^{(n)}(t) = D^n f(a + ht, b + kt)$$

となる (厳密には数学的帰納法で証明する)。1 変数のテーラーの定理より

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。これを整理すると定理が得られる。

演習問題 2.28 $n = 4$ のとき定理 2.26 を D を用いないで記述せよ。また $n = 5$ のときも記述せよ。

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx}(a, b) + 3h^2 k f_{xxy}(a, b) + 3hk^2 f_{xyy}(a, b) + k^3 f_{yyy}(a, b)) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(h^4 f_{xxxx}(a + \theta h, b + \theta k) + 4h^3 k f_{xxx}(a + \theta h, b + \theta k) + 6h^2 k^2 f_{xxy}(a + \theta h, b + \theta k) \\ &\quad + 4hk^3 f_{xyy}(a + \theta h, b + \theta k) + k^4 f_{yyy}(a + \theta h, b + \theta k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a+h, b+k) &= f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)) \\
&\quad + \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx}(a, b) + 3h^2 k f_{xxy}(a, b) + 3hk^2 f_{xyy}(a, b) + k^3 f_{yyy}(a, b)) \\
&\quad + \frac{1}{4!}(h^4 f_{xxxx}(a, b) + 4h^3 k f_{xxx}(a, b) + 6h^2 k^2 f_{xxy}(a, b) + 4hk^3 f_{xyy}(a, b) + k^4 f_{yyy}(a, b)) \\
&\quad + \frac{1}{5!}(h^5 f_{xxxxx}(a+\theta h, b+\theta k) + 5h^4 k f_{xxxxy}(a+\theta h, b+\theta k) + 10h^3 k^2 f_{xxxyy}(a+\theta h, b+\theta k) \\
&\quad + 10h^2 k^3 f_{xxyyy}(a+\theta h, b+\theta k) + 5hk^4 f_{xyyyy}(a+\theta h, b+\theta k) + k^5 f_{yyyyy}(a+\theta h, b+\theta k))
\end{aligned}$$

演習問題 2.29 次の関数を $(x, y) = (a, b)$ で近似する 1 次式, 2 次式および 3 次式を求めよ。ただし演習問題 2.29 の結果は用いてもよい。

(1) $z = f(x, y) = (x-1)(y+2) \quad (a, b) = (0, 0)$

(2) $z = f(x, y) = \frac{1}{1-2x+3y} \quad (a, b) = (0, 0)$

(3) $z = f(x, y) = \sin(x+y) \quad (a, b) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(1) $f_x = y+2, f_y = x-1, f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = 1, f_{xxx} = 0, f_{xxy} = 0, f_{xyy} = 0, f_{yyy} = 0$ なので $f(0, 0) = -2, f_x(0, 0) = 2, f_y(0, 0) = -1, f_{xx}(0, 0) = 0, f_{xy}(0, 0) = 1, f_{yy}(0, 0) = 0, f_{xxx}(0, 0) = 0, f_{xxy}(0, 0) = 0, f_{xyy}(0, 0) = 0, f_{yyy}(0, 0) = 0$ となる。

$(x, y) = (0, 0)$ で $f(x, y)$ を近似する 1 次式は

$$f(0+h, 0+k) \sim -2 + 2h - k$$

であり, 近似する 2 次式は

$$f(0+h, 0+k) \sim -2 + 2h - k + hk = f(h, k)$$

であり, 近似する 3 次式は

$$f(0+h, 0+k) \sim -2 + 2h - k + hk = f(h, k)$$

となる。この場合 $f(x, y)$ は 2 次式なので, 近似の式は 2 次の段階で $f(x, y)$ に一致している。

(2) $f_x = \frac{2}{(1-2x+3y)^2}, f_y = -\frac{3}{(1-2x+3y)^2}, f_{xx} = \frac{8}{(1-2x+3y)^3}, f_{xy} = -\frac{12}{(1-2x+3y)^3},$

$f_{yy} = \frac{18}{(1-2x+3y)^3}, f_{xxx} = \frac{48}{(1-2x+3y)^4}, f_{xxy} = -\frac{72}{(1-2x+3y)^4}, f_{xyy} = \frac{108}{(1-2x+3y)^4},$

$f_{yyy} = -\frac{162}{(1-2x+3y)^4}$ なので $f(0, 0) = 1, f_x(0, 0) = 2, f_y(0, 0) = -3, f_{xx}(0, 0) = 8, f_{xy}(0, 0) = -12, f_{yy}(0, 0) = 18, f_{xxx}(0, 0) = 48, f_{xxy}(0, 0) = -72, f_{xyy}(0, 0) = 108, f_{yyy}(0, 0) = -162$ となる。

$(x, y) = (0, 0)$ で $f(x, y)$ を近似する 1 次式は

$$f(0+h, 0+k) \sim 1 + 2h - 3k$$

であり, 近似する 2 次式は

$$f(0+h, 0+k) \sim 1 + 2h - 3k + 4h^2 - 12hk + 9k^2$$

であり, 近似する 3 次式は

$$f(0+h, 0+k) \sim 1 + 2h - 3k + 4h^2 - 12hk + 9k^2 + 8h^3 - 36h^2k + 54hk^2 - 27k^3$$

となる。

$$(3) \quad f_x = f_y = \cos(x+y), f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = -\sin(x+y), f_{xxx} = -\cos(x+y), f_{xxy} = -\cos(x+y), f_{xyy} = -\cos(x+y), f_{yyy} = -\cos(x+y) \text{ なので } f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1, f_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1, f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f_{xxx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1, f_{xxy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1, f_{xyy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1, f_{yyy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ となる。}$$

$(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で $f(x, y)$ を近似する 1 次式は

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h, \frac{\pi}{2} + k\right) \sim -h - k$$

であり, 近似する 2 次式は

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h, \frac{\pi}{2} + k\right) \sim -h - k$$

であり, 近似する 3 次式は

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h, \frac{\pi}{2} + k\right) \sim -h - k + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{2}h^2k + \frac{1}{2}hk^2 + \frac{1}{6}k^3$$

となる。

演習問題 *2.30

- (1) $f(a, b) + Df(a, b)$ が $(x, y) = (a, b)$ で $f(x + h, y + k)$ を近似する 1 次式であることを示せ。
- (2) $f(a, b) + Df(a, b) + \frac{1}{2!}D^2f(a, b)$ が $(x, y) = (a, b)$ で $f(x + h, y + k)$ を近似する 2 次式であることを示せ。
- (3) $\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}D^j f(a, b)$ が $(x, y) = (a, b)$ で $f(x + h, y + k)$ を近似する n 次式であることを示せ。

(1) $\varepsilon(h, k) = \frac{f(a + h, b + k) - (f(a, b) + Df(a, b))}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ とおくと, テーラーの定理より

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} &= f(a + h, b + k) - (f(a, b) + Df(a, b)) = R_2 = \frac{1}{2!}D^2(a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) \right) \end{aligned}$$

となる。 $M_1 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$, $M_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$,

$M_3 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$, $M = \max \{ M_1, M_2, M_3 \}$ とおくと

$$\begin{aligned} &\left| h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &\leq M_1 h^2 + 2M_2 |h| |k| + M_3 k^2 \leq M h^2 + 2M |h| |k| + M k^2 \\ &= M (h^2 + 2|h| |k| + k^2) = M (|h| + |k|)^2 \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \frac{1}{2} \frac{M(|h| + |k|)^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

が成立する。 $h = r \cos \theta, k = r \sin \theta$ とおくと, $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ となるとき $r \rightarrow 0$ となる。

$$\frac{(|h| + |k|)^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{(r|\cos \theta| + r|\sin \theta|)^2}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}} = \frac{r^2(|\cos \theta| + |\sin \theta|)^2}{r} = r(|\cos \theta| + |\sin \theta|)^2$$

より $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(h, k)| = 0$ が得られる。これより $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立する。

$$(2) \quad \varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - \left(f(a, b) + Df(a, b) + \frac{1}{2!} D^2 f(a, b) \right)}{(\sqrt{h^2 + k^2})^2} \quad \text{とおくと, テーラーの定理}$$

より

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) (\sqrt{h^2 + k^2})^2 &= R_3 = \frac{1}{3!} D^3(a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 h^{3-j} k^j {}_3C_j \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} y^j}(a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

となる。 $M_j = \max \left\{ \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} y^j}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$ ($j = 0, 1, 2, 3$), $M = \max \{ M_0, M_1, M_2, M_3 \}$ とおくと

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h, k)| (\sqrt{h^2 + k^2})^2 &\leq \frac{1}{3!} D^3(a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 \left| h^{3-j} k^j {}_3C_j \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} y^j}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 |h^{3-j}| |k^j| {}_3C_j \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} y^j}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &\leq \frac{M}{3!} \sum_{j=0}^3 {}_3C_j |h^{3-j}| |k^j| = \frac{M}{3!} (|h| + |k|)^3 \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \frac{M}{3!} \frac{(|h| + |k|)^3}{h^2 + k^2}$$

が成立し, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(h, k)| = 0$ が得られる。これより $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立する。

$$(3) \quad \varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} D^j f(a, b) \right)}{(\sqrt{h^2 + k^2})^n} \quad \text{とおくと, テーラーの定理より}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) (\sqrt{h^2 + k^2})^n &= R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}(a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} h^{n+1-j} k^j {}_{n+1}C_j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j}(a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

となる。 $M_j = \max \left\{ \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$ ($j = 0, 1, \dots, n+1$),
 $M = \max \{ M_j \mid j = 0, 1, \dots, n+1 \}$ とおくと

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h, k)| \left(\sqrt{h^2 + k^2} \right)^n &\leq \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} (a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \left| h^{n+1-j} k^j {}_{n+1}C_j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} |h^{n+1-j}| |k^j| {}_{n+1}C_j \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} {}_{n+1}C_j |h^{n+1-j}| |k^j| = \frac{M}{(n+1)!} (|h| + |k|)^{n+1} \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \frac{(|h| + |k|)^{n+1}}{(\sqrt{h^2 + k^2})^n}$$

が成立し, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(h, k)| = 0$ が得られる。これより $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立する。