# 解析学 I 問題解説 #9

河野

**演習問題 2.31**　命題 2.27 を示せ。

$f$ が $(a,b)$ で広義の極大値をとるとする。ある $\delta > 0$ が存在して $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ ならば $f(a,b) \geq f(x,y)$ が成立しているので，絶対値が十分小さい (0 に近い)$h, k$ に対し

$$f(a+h,b) \leq f(a,b), \qquad f(a,b+k) \leq f(a,b)$$

が成立している。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$ が成立しているので，

$$f_x^+(a,b) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$$

$h < 0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$ が成立しているので，

$$f_x^-(a,b) = \lim_{h \to -0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$$

よって

$$0 \leq f_x^-(a,b) = f_x(a,b) = f_x^+(a,b) \leq 0$$

より $f_x(a,b) = 0$ となる。

$k > 0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leq 0$ が成立しているので，

$$f_y^+(a,b) = \lim_{k \to +0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leq 0$$

$k < 0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geq 0$ が成立しているので，

$$f_y^-(a,b) = \lim_{k \to -0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geq 0$$

よって

$$0 \leq f_y^-(a,b) = f_y(a,b) = f_y^+(a,b) \leq 0$$

より $f_y(a,b) = 0$ となる。$(a,b)$ は $f$ の臨界点である。

次に (広義の) 極小値をとるときを考える。$(a,b)$ で $f$ が広義の極小値をとるので絶対値が十分小さい (0 に近い) $h$ と $k$ に対して，$f(a,b) \leq f(a+h,b+k)$ が成立している。$h > 0$ のとき

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$$

より

$$f_x^+(a,b) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$$

が成立する。また $h<0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$ より

$$f_x^-(a,b) = \lim_{h\to -0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$$

が成立する。よって

$$0 \leq f_x^+(a,b) = f_x(a,b) = f_x^-(a,b) \leq 0$$

より $f_x(a,b)=0$ である。

$k>0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geq 0$ より

$$f_y^+(a,b) = \lim_{k\to +0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geq 0$$

が成立する。また $k<0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leq 0$ より

$$f_y^-(a,b) = \lim_{k\to -0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leq 0$$

が成立する。よって

$$0 \leq f_y^+(a,b) = f_y(a,b) = f_y(a,b) \leq 0$$

より $f_y(a,b)=0$ である。$(a,b)$ は $f$ の臨界点である。

**演習問題 2.32**　2 次関数 $z=f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$，$(a,b)=(0,0)$ に対して定理 2.29 が成立することを示せ。(ヒント：$y\neq 0$ のとき関数を $y^2$ で割って，$t=\dfrac{x}{y}$ とおくと，2 次方程式の判別式が使える。)

$$z_x = 2Ax+2By, \quad z_y = 2Bx+2Cy, \quad z_{xx}=2A, \quad z_{xy}=2B, \quad z_{yy}=2C$$

$(x,y)=(0,0)$ は臨界点であり，$f(0,0)=0$ である。ヘッシアンは

$$H = f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = 4\left(AC-B^2\right)$$

となる。最初に $H>0$ かつ $A>0$ の場合を考える。$y=0$ のとき $f(x,0)=Ax^2$ となるので，$x\neq 0$ のとき $f(x,0)=Ax^2>0=f(0,0)$ となっている。$y\neq 0$ のとき $\dfrac{1}{y^2}f(x,y)=A\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2B\left(\dfrac{x}{y}\right)+C$ である。$g(t)=At^2+2Bt+C$ とおくと，$H$ は 2 次方程式 $g(t)=0$ の判別式の符号を逆にしたものなので，$H>0$ かつ $A>0$ より，任意の $t$ に対し $g(t)>0$ が成立する。よって $\dfrac{1}{y^2}f(x,y)>0$ となり，$f(x,y)>0$ が得られる。以上により $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)>f(0,0)$ なので $(0,0)$ で極小値をとる。

次に $H>0$ かつ $A<0$ のときを考える。$y=0$ のとき $f(x,0)=Ax^2$ となるので，$x\neq 0$ のとき $f(x,0)=Ax^2<0=f(0,0)$ となっている。$y\neq 0$ のとき $\dfrac{1}{y^2}f(x,y)=A\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2B\left(\dfrac{x}{y}\right)+C$

である。$g(t)=At^2+2Bt+C$ とおくと，$H$ は 2 次方程式 $g(t)=0$ の判別式の符号を逆にしたものなので，$H>0$ かつ $A<0$ より，任意の $t$ に対し $g(t)<0$ が成立する。よって $\dfrac{1}{y^2}f(x,y)<0$ となり，$f(x,y)<0$ が得られる。以上により $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)<f(0,0)$ なので $(0,0)$ で極大値をとる。

$A=0$ のときは $H=-B^2$ なので $H>0$ となることはない。よって $H>0$ の場合は示された。

次に $H<0$ のときを考える。$y\neq 0$ として $t=\dfrac{x}{y}$ に対し $g(t)=At^2+Bt+C$ を考える。$H<0$ なのでこのグラフは $x$ 軸と交わる。よって $g(t)$ は正の値も負の値もとる。即ち $\exists t_1\ g(t_1)>0$ かつ $\exists t_2\ g(t_2)<0$ が成立する。このとき $t_1=\dfrac{x_1}{y_1}$ となる $(x_1,y_1)$ に対して $f(x_1,y_1)=\dfrac{1}{y_1^2}g(t_1)>0$ となるので，$f(x_1,y_1)>0$ となる。$y_1$ を充分小さくとると $(x_1,y_1)$ は原点に充分近い。$t_2=\dfrac{x_2}{y_2}$ となる $(x_2,y_2)$ に対して $f(x_2,y_2)=\dfrac{1}{{y_2}^2}g(t_2)<0$ となるので，$f(x_2,y_2)<0$ となる。$y_2$ を充分小さくとると $(x_2,y_2)$ は原点に充分近い。$(0,0)$ にいくらでも近いところに $f(x_1,y_1)>0$ となる点 $(x_1,y_1)$ と $f(x_2,y_2)<0$ となる点 $(x_2,y_2)$ が存在するので $(0,0)$ は極値ではない。

**演習問題 *2.33**　定理 2.29 を証明せよ。

式が長くなるので $f_{xy}(a,b)$ 等を $f_{xy}$，$f_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)$ 等を $f_{xy}(\theta)$ と略記する。テーラーの定理より

$$R_3=\frac{1}{3!}\left(h^3f_{xxx}(\theta)+3h^2kf_{xxy}(\theta)+3hk^2f_{xyy}(\theta)+k^3f_{yyy}(\theta)\right)$$

とおくと

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+hf_x+kf_x+\frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\right)+R_3$$

となる $\theta$ $(0<\theta<1)$ が存在する。$F_2=\dfrac{1}{2}\left(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\right)$ とおくと，$f_x(a,b)=0, f_y(a.b)=0$ より

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=F_2+R_3$$

となる。

$H(a,b)>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$ の場合を考える。$F_2$ は $h,k$ に関する 2 次式なので，演習問題 2.32 より原点の近くで $F_2>0$ となっている。$F_2+R_3>0$ が示されれば極小であることが分かる。

$(h,k)$ に対し $r=\sqrt{h^2+k^2}$ とし，

$$h=ru,\quad k=rv$$

とおくと $(u,v)$ は半径 1 の円周上の点である。

$$F_2=r^2\frac{1}{2}\left(u^2f_{xx}+2uvf_{xy}+v^2f_{yy}\right)$$
$$R_3=r^3\frac{1}{6}\left(u^3f_{xxx}(\theta)+3u^2vf_{xxy}(\theta)+3uv^2f_{xyy}(\theta)+v^3f_{yyy}(\theta)\right)$$

より

$$G_2(u,v)=\frac{1}{2}\left(u^2f_{xx}+2uvf_{xy}+v^2f_{yy}\right)$$
$$G_3(u,v)=\frac{1}{6}\left(u^3f_{xxx}(\theta)+3u^2vf_{xxy}(\theta)+3uv^2f_{xyy}(\theta)+v^3f_{yyy}(\theta)\right)$$

とおく。

$G_2$ は $r$ が変化しても変化しないが，$r$ が変化すると $\theta$ が変化するので，$r$ が変化すると $G_3$ が変化することを注意しておく。

$(u,v)$ は半径 1 の円周上を動く。円周は有界閉集合なので，最大値定理より $G_2(u,v)$ は最小値 $M_2$ をとる。このとき任意の $(u,v)$ に対し $G_2 \geq M_2$ が成立する。$G_2$ も 2 次式で $F_2$ と同じ条件を満たすので $G_2 > 0$ であり，$M_2 > 0$ である。充分小さな $\delta > 0$ に対し

$$N = \max\{\, |f_{xxx}(a,y)|, |f_{xxy}(x,y)|, |f_{xyy}(x,y)|, |f_{yyy}(x,y)| \mid d\left((x,y),(a,b)\right) \leq \delta \}$$

とおくと

$$\begin{aligned} |G_3| &\leq \frac{1}{6}\left(|u|^3 N + 3|u|^2|v|N + 3|u||v|^2 N + |v|^3 N\right) \\ &= \frac{N}{6}(|u|+|v|)^3 \end{aligned}$$

となるが $\dfrac{N}{6}(|u|+|v|)^3$ も連続関数なので最大値 $M_3$ が存在する。$r$ を $M_3 r < M_2$ が成立するように十分小さくとると，

$$\begin{aligned} F_2 + R_3 = r^2 G_2 + r^3 G_3 &\geq r^2 G_2 - r^3|G_3| \\ &\geq r^2 M_2 - r^3 M_3 = r^2(M_2 - rM_3) > 0 \end{aligned}$$

次に $H(a,b) > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) < 0$ のときを考える。$F_2$ は $h,k$ に関する 2 次式なので，演習問題 2.32 より原点の近くで $F_2 < 0$ となっている。$F_2 + R_3 < 0$ が示されれば極大であることが分かる。

$r,u,v,G_2,G_3,N,M_3$ を先程と同じものとする。最大値定理より $G_2(u,v)$ は最大値 $N_2$ をとる。このとき任意の $(u,v)$ に対し $G_2 \leq N_2$ が成立する。$G_2$ も 2 次式で $F_2$ と同じ条件を満たすので $G_2 < 0$ であり，$N_2 < 0$ である。$r$ を $M_3 r < -N_2$ が成立するように十分小さくとると，

$$\begin{aligned} F_2 + R_3 = r^2 G_2 + r^3 G_3 &\leq r^2 G_2 + r^3|G_3| \\ &\leq r^2 N_2 + r^3 M_3 = r^2(N_2 - rM_3) < 0 \end{aligned}$$

最後に $H(a,b) < 0$ の場合を考える。演習問題 2.32 より半径 1 の円周上の点 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ で $G_2(u_1,v_1) > 0, G_2(u_2,v_2) < 0$ となる点が存在する。$r$ を十分小さくとって

$$rM_3 < G_2(u_1,v_1), \qquad rM_3 < -G_2(u_2,v_2)$$

の両方が成立するようにしておく。このとき $(x_1,y_1) = (ru_1, rv_1), (x_2,y_2) = (ru_2, rv_2)$ とおくと

$$F_2(x_1,y_1) + R_3(x_1,y_1) \geq r^2 G(u_1,v_1) - r^3 M_3 \geq r^2(G(u_1,v_1) - rM_3) > 0$$
$$F_2(x_2,y_2) + R_3(x_2,y_2) \leq r^2 G(u_2,v_2) +^3 M_3 \leq r^2(G(u_2,v_2) + rM_3) < 0$$

となるので $(a.b)$ は極点ではない。

**演習問題 2.34**　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$　　(2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$　　(4) $z = x^3 - 3xy + y^3$

(5) $z = xy(x^2+y^2-1)$ (6) $z = x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

(7) $z = \dfrac{ax+by}{x^2+y^2+1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

(8) $z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ $(a > b > 0)$

(1) (a) 最初に臨界点 ($z_x = 0$ かつ $z_y = 0$ となる点) を求める。$z_x = 2x-y-2, z_y = -x+2y+3$ なので連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解くと $x = \dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{4}{3}$ が得られる。(b) 次にヘッシアンを計算する。$z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = -1$ なので $H(x,y) = 2^2-(-1)^2 = 3 > 0, z_{xx} > 0$ である。よって $z$ は $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ で極小値 $-\dfrac{4}{3}$ をとる。

(2) 同様に計算すると $\left(-\dfrac{1}{17}, \dfrac{3}{17}\right)$ が臨界点であるが，$H(x,y) = -17 < 0$ である。臨界点が極値を与えないので極値は存在しない。

(3) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 3x^2+2y^2-6x, \quad z_y = 4xy-6y$$

なので $z_y = 0$ より $y(2x-3) = 0$ となるので，$y = 0$ または $2x-3 = 0$ となる。$y = 0$ のとき

$$z_x(x,0) = 3x^2+2\cdot 0^2-6x = 3x^2-6x = 0$$

を得る。よって $y = 0$ のときは $x = 0$ または $x = 2$ である。

$x = \dfrac{3}{2}$ のとき

$$z_x\left(\frac{3}{2}, y\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2y^2 - 6\cdot\frac{3}{2} = 0$$

を得る。よって $y = \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ である。以上により臨界点は

$$(x,y) = (0,0), \quad (2,0), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

である。

$$z_{xx} = 6x-6, \quad z_{xy} = 4y, \quad z_{yy} = 4x-6$$

なので

$$H(x,y) = 12(x-1)(2x-3)-16y^2$$

となる。よって

$$H(0,0) = 36 > 0, H(2,0) = 12 > 0, H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0, H\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0$$

となる。よって極値を与える $(x,y)$ は $(0,0)$ と $(2,0)$ である。$z_{xx}(0,0) = -6 < 0$，$z_{xx}(2,0) = 6 > 0$ なので $(0,0)$ では極大，$(2,0)$ では極小である。

(4) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 3x^2-3y, \quad z_y = -3x+3y^2$$

なので $z_x = 0$ から $z_y = 0$ を引くことにより

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - y^2 - y + x = (x^2 - y^2) + (x - y) \\ &= (x-y)(x+y) + (x-y) \\ &= (x-y)(x+y+1) \end{aligned}$$

を得る。よって $x = y$ または $x + y = -1$ が成立する。

最初に $x+y = -1$ が成立している場合を考える。$y = -1-x$ を $x = y^2$ に代入すると，$x = (1+x)^2$ より $x^2 + x + 1 = 0$ を得る。この 2 次方程式は実数解を持たないので，この場合は解はない。よって $x = y$ が成立する。これをもとの方程式に代入すると $x = 0, 1$ が得られる。よって臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (1, 1)$$

である。

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = -3, \quad z_{yy} = 6y$$

なので

$$H(x, y) = 36xy - 9$$

となる。よって

$$H(0, 0) = -9 < 0, \quad H(1, 1) = 27 > 0$$

となる。よって極値を与える $(x, y)$ は $(x, y) = (1, 1)$ である。$z_{xx}(1, 1) = 6 > 0$ なので $(1, 1)$ で極小である。

(5)　最初に臨界点を求める。

$$z_x = y(x^2 + y^2 - 1) + 2x^2 y, \quad z_y = x(x^2 + y^2 - 1) + 2xy^2$$

なので $z_x = 0$ から $z_y = 0$ を引くことにより

$$\begin{aligned} 0 &= (y-x)(x^2 + y^2 - 1) + 2xy(x - y) = (y-x)(x^2 + y^2 - 1) - 2xy(y - x) \\ &= (y-x)(x^2 + y^2 - 1 - 2xy) = (y-x)\bigl((x-y)^2 - 1\bigr) \\ &= (y-x)(x-y-1)(x-y+1) \end{aligned}$$

を得る。よって $x = y$ または $x - y - 1 = 0$ または $x - y + 1 = 0$ が成立する。

最初に $x = y$ が成立している場合を考える。

$$\begin{aligned} 0 = z_x(x, x) &= x(x^2 + x^2 - 1) + 2x^3 = x(4x^2 - 1) \\ &= x(2x-1)(2x+1) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = \pm\dfrac{1}{2}$ となる。よってこの場合

$$(x, y) = (0, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

である。

次に $x-y-1=0$ の場合を考える。$y=x-1$ なので

$$\begin{aligned}0=z_y(x,x-1)=&x\bigl(x^2+(x-1)^2-1\bigr)+2x(x-1)^2=x\bigl(x^2+(x-1)^2-1+2(x-1)^2\bigr)\\=&x(4x^2-6x+2)=2x(2x^2-3x+1)\\=&2x(2x-1)(x-1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\dfrac{1}{2}$ または $x=1$ となる。今の場合 $y=x-1$ なので

$$(x,y)=(0,-1),\quad \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad (1,0)$$

である。

最後に次に $x-y+1=0$ の場合を考える。$y=x+1$ なので

$$\begin{aligned}0=z_y(x,x+1)&=x\bigl(x^2+(x+1)^2-1\bigr)+2x(x+1)^2=x\bigl(x^2+(x+1)^2-1+2(x+1)^2\bigr)\\&=x(4x^2+6x+2)=2x(2x^2+3x+1)\\&2x(2x+1)(x+1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=-\dfrac{1}{2}$ または $x=-1$ となる。今の場合 $y=x+1$ なので

$$(x,y)=(0,1),\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad (-1,0)$$

である。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0),\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$$

である。

$$z_{xx}=6xy,\quad z_{xy}=3x^2+3y^2-1,\quad z_{yy}=6xy$$

なので

$$H(x,y)=36x^2y^2-(3x^2+3y^2-1)^2$$

となる。よって

$$H(0,0)=-1<0,H(0,\pm1)=-4<0,H(\pm1,0)=-4<0,H\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0,H\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0$$

となる。よって極値を与える $(x,y)$ は $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$, である。

$$z_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=z_{xx}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)>0,\quad z_{xx}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=z_{xx}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)<0$$

なので $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ で極小であり，$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ で極大である。

(6)　最初に臨界点を求める。

$$z_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

なので $z_x = 0$ と $z_y = 0$ を加えて 4 で割ると

$$0 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

を得る。よって $x + y = 0$ または $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立する。

最初に $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立している場合を考える。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

より $x = 0, y = 0$ を得る。これは $z_x(0,0) = 0, z_y(0,0) = 0$ を満たしている。

次に $x + y = 0$ の場合を考える。$y = -x$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 = z_x(x, -x) &= 4x^3 - 4x - 4x = 4(x^3 - 2x) \\ &= 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = \sqrt{2}$ または $x = -\sqrt{2}$ となる。今の場合

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

となる。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

である。

$$z_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z_{xy} = 4, \quad z_{yy} = 12y^2 - 4$$

なので

$$H(x, y) = 16(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 16$$

となる。よって

$$H(0, 0) = 0, \quad H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 384 > 0$$

となる。$z_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ なので $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で極小である。

$(x, y) = (0, 0)$ はこれだけではよく分からない。最初に $y = x$ 上での $z$ の動きを見よう。$g(x) = z(x, x)$ とおくと

$$g(x) = 2x^4$$

となるので $x = 0$ で極小である。よって $(0, 0)$ の十分近くの点 $(x, y)$ で (今の場合 $y = x$ を満たしている)，$z(x, y) > z(0, 0)$ となる点がある。

次に $y = -x$ 上での $z$ の動きを見よう。$h(x) = z(x, -x)$ とおくと

$$h(x) = 2x^4 - 8x^2$$

となる。$h(x)$ の増減表を書いて $x=0$ のまわりの状況を調べると，$y=-x$ 上では極大になっている。よって $(0,0)$ の十分近くの点 $(x,y)$ で (今の場合 $y=-x$ を満たしている)，$z(x,y)<z(0,0)$ となる点がある。十分近くに $z(0,0)$ より大きい点も小さい点もあるので，$z$ は $(0,0)$ で極値をとらない。

以上により $(x,y)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ および $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ で極小値をとる。

(7)　$z_x=\dfrac{a}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2(ax+by)x}{(x^2+y^2+1)^2}$, $z_y=\dfrac{b}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2(ax+by)y}{(x^2+y^2+1)^2}$ なので臨界点は連立方程式 $z_x=0, z_y=0$ の解である。$z_x=0$ より $x=\dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}a$ となる。また $z_y=0$ より $y=\dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}b$ となる。$k=\dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}$ とおくと $x=ka, y=kb$ となる。これを $z_x(x^2+y^2+1)^2=a(x^2+y^2+1)-2(ax+by)x=0$ に代入して

$$a((a^2+b^2)k^2+1)-2(a^2+b^2)ak^2=0$$

を得る。これを解くと $k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となるので，臨界点は

$$(x,y)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

である。

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{2(ax^3-3y^2ax-3ax+3byx^2-by^3-by)}{(x^2+y^2+1)^3} & \dfrac{2(3ayx^2-ay^3-ay-bx^3+3bxy^2-bx)}{(x^2+y^2+1)^3} \\ \dfrac{2(3ayx^2-ay^3-ay-bx^3+3bxy^2-bx)}{(x^2+y^2+1)^3} & -\dfrac{2(3byx^2-by^3+3by-3y^2ax+ax^3+ax)}{(x^2+y^2+1)^3} \end{vmatrix}$$

となる。$k=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(\varepsilon=\pm1)$ とおくと

$$H\left(\frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\begin{vmatrix} -\varepsilon\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} & 0 \\ 0 & -\varepsilon\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{vmatrix}=\frac{a^2+b^2}{4}>0$$

である。$z_{xx}\left(\dfrac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2+b^2}},\dfrac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=-\varepsilon\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ より $(x,y)=\left(-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ は極小値を $(x,y)=\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ は極大値を与える。極値は

$$z\left(\frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

である。

(8)　$z_x=-2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2e^{-(x^2+y^2)}ax, z_y=-2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2e^{-(x^2+y^2)}by$ となっている。連立方程式 $z_x=0, z_y=0$ を解く。$e^{-(x^2+y^2)}\neq 0$ なので

$$z_x=0 \iff x=0\vee a-(ax^2+by^2)=0, \qquad z_y=0 \iff y=0\vee b-(ax^2+by^2)=0$$

となっている。場合分けを実行する。(a) $x=0$, (b) $a-(ax^2+by^2)=0$, (c) $y=0$, (d) $b-(ax^2+by^2)=0$，とすると，

$$\Big((\mathrm{a})\vee(\mathrm{b})\Big)\wedge\Big((\mathrm{c})\vee(\mathrm{d})\Big)=\Big((\mathrm{a})\wedge(\mathrm{c})\Big)\vee\Big((\mathrm{a})\wedge(\mathrm{d})\Big)\vee\Big((\mathrm{b})\wedge(\mathrm{c})\Big)\vee\Big((\mathrm{b})\wedge(\mathrm{d})\Big)$$

となる。

(1) (a) $\wedge$ (c) のとき：この場合は $x=0$ かつ $y=0$ なので解は $(x,y)=(0,0)$ である。

(2) (a) $\wedge$ (d) のとき：$x=0$ を $b-(ax^2+by^2)=0$ に代入すると，$b(1-y^2)=0$ となる。$b\neq 0$ より $1-y^2=0$，よって $y=\pm 1$ となる。この場合解は $(x,y)=(0,\pm 1)$ である。

(3) (b) $\wedge$ (c) のとき：$y=0$ を $a-(ax^2+by^2)=0$ に代入すると，$a(1-x^2)=0$ となる。$a\neq 0$ より $1-x^2=0$，よって $x=\pm 1$ となる。この場合解は $(x,y)=(\pm 1,0)$ である。

(4) (b) $\wedge$ (d) のとき：$a=ax^{+}by^2=b$ となるので $a=b$ となり，$a>b$ に矛盾する。よってこの場合解はない。

以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(0,\pm 1),(\pm 1,0)$$

となる。

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2-by^2+2x^4a+2x^2by^2+a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2-5by^2+2y^2ax^2+2y^4b+b) \end{vmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}
H(0,0) &= \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab>0 \\
H(0,1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2}<0 \\
H(0,-1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2}<0 \\
H(1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2}>0 \\
H(-1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2}>0
\end{aligned}$$

となる。よって $z$ は $(x,y)=(0,0)$ で極小値 $z(0,0)=0$，$(x,y)=(\pm 1,0)$ で極大値 $z(\pm 1,0)=\dfrac{a}{e}$ をとる。

**演習問題 2.35**　命題 2.33 を証明せよ。

領域の点は境界上にあるか内部にあるかのいずれかである。内部にあるときは広義の極大値になっている。そのとき命題 2.27 より臨界点である。

**演習問題 2.36**

(1) $x+y+z=a$ $(a>0)$ のとき $\left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0 \right\}$ における $x^3y^3z$ の最大値を求めよ。

(2) $f(x,y)=(x+1)^2+(y+1)^2$，$D=\{\,(x,y)\mid -2\leq x\leq 2,-2\leq y\leq 2\}$ とする。$D$ における $f(x,y)$ の最大値を求めよ。

(3) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。

(4) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

(1)　$z=a-x-y$ と考え，$f(x,y)=x^3y^3z=x^3y^3(a-x-y)$ の最大値を求める。
$\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\,\right\}$ の条件

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$$

を $x,y$ についての条件に書き直すと

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq a$$

となる。よって $D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq a\,\right\}$ 上で $f(x,y)=x^3y^3(a-x-y)$ の最大値を求めればよい。

$D$ は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は連続なので，$D$ 上で $f(x,y)$ は最大値をとる。その点は境界上にあるか，内部の臨界点である。境界上では $f(x,y)=0$ となる。内部の臨界点を調べる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^3(a-x-y)-x^3y^3=x^2y^3(3a-4x-3y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^3y^2(a-x-y)-x^3y^3=x^3y^2(3a-3x-4y)$$

$x=0$，$y=0$ は境界なので，内部で $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ を満たすのは $x=\dfrac{3a}{7},y=\dfrac{3a}{7}$ である。

$$f\left(\frac{3a}{7},\frac{3a}{7}\right)=\frac{3^6a^7}{7^7}$$

なので最大値は $\dfrac{3^6a^7}{7^7}$ である。

(2)　$D$ は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は連続なので最大値が存在する。その点は境界上にあるか，内部の臨界点である。

臨界点を求める。$f_x=2(x+1),f_y=2(y+1)$ なので臨界点は $(x,y)=(-1,-1)$ である。臨界点での値は

$$f(-1,-1)=0$$

である。

$L_1=\{\,(x,2)\mid -2\leq x\leq 2\}$，$L_2=\{\,(x,-2)\mid -2\leq x\leq 2\}$，$L_3=\{\,(2,y)\mid -2\leq y\leq 2\}$，$L_4=\{\,(-2,y)\mid -2\leq y\leq 2\}$ とおくと

$$\partial D=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4$$

である。

$L_1$ では $y=2$ なので $f(x,y)=f(x,2)=(x+1)^2+3^2$ である。$-2\leq x\leq 2$ より $L_1$ 上では $x=2$ のとき最大であり，$f(2,2)=18$ である。

$L_2$ では $y=-2$ なので $f(x,y)=f(x,-2)=(x+1)^2+1^2$ である。$-2\leq x\leq 2$ より $L_2$ 上では $x=2$ のとき最大であり，$f(2,-2)=10$ である。

$L_3$ では $x=2$ なので $f(x,y)=f(2,y)=3^2+(y+1)^2$ である。$-2\le y\le 2$ より $L_3$ 上では $y=2$ のとき最大であり，$f(2,2)=18$ である。

$L_4$ では $x=-2$ なので $f(x,y)=f(-2,y)=1^2+(y+1)^2$ である。$-2\le y\le 2$ より $L_4$ 上では $y=2$ のとき最大であり，$f(-2,2)=10$ である。

以上により境界上では $(x,y)=(2,2)$ のとき最大値 $f(2,2)=18$ をとる。

よって最大値は $f(2,2)=18$ である。

(3)　このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを $a,b,c$ とする。$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとき，3 角形の面積 $S$ は $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

3 角形の各辺の長さを $x,y,z$ とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを $2s$ とおく，即ち $x+y+z=2s$ $(s>0)$ が成立している。$x,y,z$ は辺の長さであるから $x>0,y>0,z>0$ を満たしている。$x,y,z$ が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式，即ち $x+y>z,y+z>x,z+x>y$ が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき，3 辺の長さが $x,y,z$ であるような 3 角形が存在する。$z$ を消去して $x,y$ の不等式から $x<s,y<s,x+y>s$ が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす $x,y$ は最初の 6 つの不等式を満たす。

$\overline{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\le s,y\le s,x+y\ge s\right\}$ とおく。ここで $S$ が最大のとき $S^2$ が最大であり，逆も成立する。よって $S^2$ が最大になる場合を求めればよい。

$$f(x,y)=S^2=s(s-x)(s-y)(x+y-s)$$

とおき，$\overline{D}$ 上で $f(x,y)$ の最大値を求める。$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は $f(x,y)=0$ となる。よって内部で最大値をとる。この点は臨界点なので臨界点を求める。

$$f_x=s(s-x)(s-y)-s(s-y)(x+y-s)=0$$
$$f_y=s(s-x)(s-y)-s(s-x)(x+y-s)=0$$

を解いて $(x,y)=(0,s),(s,0),(s,s),\left(\dfrac{2s}{3},\dfrac{2s}{3}\right)$ が得られる。この中に最大値を与える点が存在する。$f(0,s)=0$，$f(s,0)=0$，$f(s,s)=0$，$f\left(\dfrac{2s}{3},\dfrac{2s}{3}\right)=\dfrac{s^4}{27}$ なので最大値を与える点は $(x,y)=\left(\dfrac{2s}{3},\dfrac{2s}{3}\right)$ である。このとき $x=y=z=\dfrac{2s}{3}$ なので 3 角形は正 3 角形である。以上により**正 3 角形**のとき面積最大になる。

(4)　定円を点 $O$ を中心とする半径 $r$ の円とする。円に内接する 3 角形を $ABC$ とする。角 $\angle AOB=s,\angle BOC=t,\angle COA=u$ とおくと $s+t+u=2\pi$ が成立している。最大面積を求めるので，$ABC$ は $O$ を含んでいるとしてよい。このとき $ABC$ が 3 角形をなす条件は $0<s<\pi,0<t<\pi,0<u<\pi$ である。この不等式が定義する領域を $D$ とすると $D=\left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, s<\pi,t<\pi,s+t>\pi\right\}$ となる。

3 角形 $ABC$ の面積 $S$ は

$$S=\frac{1}{2}r^2\left(\sin s+\sin t+\sin(2\pi-s-t)\right)$$

なので，$\overline{D} = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s \leq \pi, t \leq \pi, s+t \geq \pi \right\}$ 上で

$$z = f(s,t) = \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t)\right)$$

の最大値を求める問題になる。

$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(s,t)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

最初に境界上での関数の値を考える。$L_1 = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s = \pi, 0 \leq t \leq \pi \right\}$，$L_2 = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq s \leq \pi, t = \pi \right\}$，$L_3 = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq s \leq \pi, s+t = \pi \right\}$ とおくと $\partial\overline{D} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ である。$L_1$ 上で $z$ は

$$\begin{aligned} z = f(\pi,t) &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin \pi + \sin t + \sin(2\pi - \pi - t)\right) \\ &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin t + \sin(\pi - t)\right) \\ &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin t + \sin t\right) = r^2 \sin t \end{aligned}$$

となるので，$L_1$ 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。$L_2$ 上では

$$z = f(s,\pi) = r^2 \sin s$$

となるので，$L_2$ 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ のときで値は $f\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) = r^2$ である。$L_3$ 上では $t = \pi - s$ なので

$$\begin{aligned} z = f(s,\pi - s) &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin(\pi - s) + \sin(2\pi - \pi)\right) \\ &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin(\pi - s)\right) \\ &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin s\right) = r^2 \sin s \end{aligned}$$

となる。$L_3$ 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。以上により境界上での最大値は $r^2$ で $(s,t) = \left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ でとることが分かる。

次に臨界点を調べる。

$$z_s = \frac{1}{2}r^2\left(\cos s - \cos(2\pi - s - t)\right), \qquad z_t = \frac{1}{2}r^2\left(\cos t - \cos(2\pi - s - t)\right)$$

なので臨界点では $\cos s - \cos(2\pi - s - t) = 0$ かつ $\cos t - \cos(2\pi - s - t) = 0$ が成立している。これより $\cos s = \cos t$ が得られる。$0 \leq s \leq \pi$ かつ $0 \leq t \leq \pi$ であるが，この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = t$ が成立する。$t = s$ を代入して $\cos s = \cos(2\pi - 2s)$ を得る。

$\pi \leq s+t \leq 2\pi$ より，$\pi \leq 2s \leq 2\pi$ が成立している。$-2\pi \leq -2s \leq -\pi$，$0 \leq 2\pi - 2s \leq \pi$ と変形できる。この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = 2\pi - 2s$ が成立する。よって臨界点は $(s,t) = \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ である。

$$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 > r^2 = f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $f$ は $(s,t)=\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ で最大値をとる。$s=t=u=\dfrac{2\pi}{3}$ なので最大になる 3 角形は正 3 角形である。

**演習問題 *2.37**　　定理 2.35 を証明せよ。

$F_y(a,b)\neq 0$ なので $F_y(a,b)>0$ の場合に証明する。$F_y(a,b)<0$ の場合も同様に証明できる (各自試みよ)。$F_y(a.b)>0$ なので $(a,b)$ のある近傍 $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, d((x,y),(a,b))<\delta\right\}$ で $(x,y)\in U$ ならば $F_y(x,y)>0$ となるものが存在する。以下点はすべて $U$ 内にあるとする。$F_y(a,b)>0$ より $F(a,y)$ は $y$ に関して単調増加である。$F(a,b)=0$ なので $y_1,y_2$ が存在して,

$$y_1<b<y_2, \qquad F(a,y_1)<F(a,b)=0<F(a,y_2)$$

を満たす。よって $a$ のある近傍 $W=\{x\in\mathbb{R}\mid |x-a|<\varepsilon\}$ が存在して

$$\forall x\in W\ ;\ F(x,y_1)<0<F(x,y_2)$$

を満たす。$\forall x\in W$ に対し $F(x,y)$ は $y$ に関し単調増加なので $F(x,y)=0$ となる $y$ が存在する。この $y$ を $y=f(x)$ と定義すると，$F(x,f(x))=0$ かつ $b=f(a)$ となっている。$x\in W$ に対し $y=f(x),k=f(x+h)-f(x)$ と置く。平均値の定理より

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=hF_x(x+\theta h,y+\theta k)+kF_y(x+\theta h,y+\theta k)$$

を満たす $\theta$ $(0<\theta<1)$ が存在する。$y=f(x)$ なので,$F(x,y)=0$，$y+k=f(x+h)$ なので，$F(x+h,y+k)=0$ が成立する。よって

$$0=hF_x(x+\theta h,y+\theta k)+kF_y(x+\theta h,y+\theta k)$$

が成立する。

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}\\ &=-\lim_{h\to 0}\frac{F_x(x+\theta h,y+\theta k)}{F_y(x+\theta h,y+\theta k)}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\end{aligned}$$

$F_y(a_1,a_2,b)\neq 0$ なので $F_y(a_1,a_2,b)>0$ の場合に証明する。$F_y(a_1,a_2,b)<0$ の場合も同様に証明できる (各自試みよ)。$F_y(a_1.a_2,b)>0$ なので $(a_1,a_2,b)$ のある近傍

$$U=\left\{(x_1,x_2,y)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, d((x_1,x_2,y),(a_1,a_2,b))<\delta\right\}$$

で $(x_1,x_2,y)\in U$ ならば $F_y(x_1,x_2,y)>0$ となるものが存在する。以下点はすべて $U$ 内にあるとする。$F_y(a_1,a_2,b)>0$ より $F(a_1,a_2,y)$ は $y$ に関して単調増加である。$F(a_1,a_2,b)=0$ なので $y_1,y_2$ が存在して,

$$y_1<b<y_2, \qquad F(a_1,a_2,y_1)<F(a_1,a_2,b)=0<F(a_1,a_2,y_2)$$

を満たす。よって $(a_1,a_2)$ のある近傍 $W=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, d((x_1,x_2),(a_1,a_2))<\varepsilon\right\}$ が存在して

$$\forall(x_1,x_2)\in W\ ;\ F(x_1,x_2,y_1)<0<F(x_1,x_2,y_2)$$

を満たす。$\forall(x_1,x_2)\in W$ に対し $F(x_1,x_2,y)$ は $y$ に関し単調増加なので $F(x_1,x_2,y)=0$ となる $y$ が存在する。この $y$ を $y=f(x_1,x_2)$ と定義すると，$F(x_1,x_2,f(x_1,x_2))=0$ かつ $b=f(a_1,a_2)$ となっている。$(x_1,x_2)\in W$ に対し $y=f(x_1,x_2), k=f(x_1+h,x_2)-f(x_1,x_2)$ と置く。$x_2$ は固定し $x_1,y$ に関する 2 変数関数だとみなして平均値の定理を適用すると

$$F(x_1+h,x_2,y+k)-F(x_1,x_2,y)=hF_{x_1}(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)+kF_y(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)$$

を満たす $\theta$ $(0<\theta<1)$ が存在する。$y=f(x_1,x_2)$ なので,$F(x_1,x_2,y)=0$，$y+k=f(x_1+h,x_2)$ なので，$F(x_1+h,x_2,y+k)=0$ が成立する。よって

$$0=hF_{x_1}(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)+kF_y(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)$$

が成立する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,+h,x_2)-f(x_1,x_2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{F_{x_1}(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)}{F_y(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)}=-\frac{F_{x_1}(x_1,x_2,y)}{F_y(x_1,x_2,y)}\end{aligned}$$

変数 $x_2$ に関しても同様に示すことができる (各自試みよ)。

**演習問題 2.38**　次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。
(1) $F(x,y)=1-y+xe^y=0$
(2) $F(x,y)=x^3y^3+y-x=0$
(3) $F(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$ (デカルトの正葉線)

(1)　式の両辺を $x$ で微分すると

$$-y'+e^y+xe^yy'=0 \tag{3}$$

となる。よって

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}$$

となる。式 (3) の両辺を $x$ で微分すると

$$-y''+2e^yy'+xe^y(y')^2+xe^yy''=0$$

となるので

$$y''=\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$$

となる。
(2)　式の両辺を $x$ で微分すると

$$3x^2y^3+3x^3y^2y'+y'-1=0 \tag{4}$$

となる。よって

$$y'=\frac{1-3x^2y^3}{1+3x^3y^2}$$

となる。式 (4) の両辺を $x$ で微分すると

$$6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2 + 3x^3y^2y'' + y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{6xy(9x^6y^6 + 3x^3y^4 - y^2 - 3x^4y^3 - 3xy - x^2)}{(1 + 3x^3y^2)^3}$$

となる。

(3)　式の両辺を $x$ で微分すると

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0 \tag{5}$$

となる。よって

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

となる。式 (5) の両辺を $x$ で微分すると

$$6x - 3y' - 3y' - 3xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0$$

となるの。

$$2\left(x - y' + yy'^2\right) + (y^2 - x)y'' = 0$$

と変形する。

$$\begin{aligned} x - y' + yy'^2 &= x + y'\left(yy' - 1\right) = x + \frac{x^2 - y}{x - y^2}\left(y\frac{x^2 - y}{x - y^2} - 1\right) \\ &= x\left(1 + \frac{(x^2 - y)(xy - 1)}{(x - y^2)^2}\right) = xy\left(\frac{x^3 - 3xy + y^3 + 1}{(x - y^2)^2}\right) \\ &= \frac{xy}{(x - y^2)^2} \qquad \text{(変形の途中で } x^3 - 3xy + y^3 = 0 \text{ を使用)} \end{aligned}$$

なので

$$y'' = \frac{2xy}{(x - y^2)^3}$$

となる。

**演習問題 2.39**　次の式が与えられているとき，$x, y$ を独立変数，$z$ を従属変数と見て，$z_x, z_y, z_{xy}$ を求めよ。

(1) $1 + x + y + z + xyz = 0$

(2) $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = 1$

(1)　与式を $x$ で微分すると

$$1 + z_x + yz + xyz_x = 0 \tag{6}$$

となる。これより $z_x = -\dfrac{1 + yz}{1 + xy}$ を得る。与式を $y$ で微分すると

$$1 + z_y + xz + xyz_y = 0$$

となる。これより $z_y = -\dfrac{1+xz}{1+xy}$ を得る。
式 (6) を $y$ で微分すると

$$z_{xy} + z + yz_y + xz_x + xyz_{xy} = 0$$

となる。これより

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{x+y+xyz-z}{(1+xy)^2} \\ &= \frac{-2z-1}{(1+xy)^2} \end{aligned}$$

を得る。
(2)　与式を $x$ で微分すると

$$2x + 2y + 2zz_x = 0 \tag{7}$$

となる。これより $z_x = -\dfrac{x+y}{z}$ を得る。与式を $y$ で微分すると

$$2x + 2y + 2zz_y = 0$$

となる。これより $z_y = -\dfrac{x+y}{z}$ を得る。
式 (7) を $y$ で微分すると

$$1 + z_y z_x + zz_{xy} = 0$$

となる。

$$\begin{aligned} zz_{xy} &= -(1 + z_y z_x) = -\left(1 + \frac{x+y}{z}\frac{x+y}{z}\right) \\ &= -\frac{x^2+2xy+y^2+z^2}{z^2} = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

より $z_{xy} = -\dfrac{1}{z^3}$ を得る。