

演習問題 3.3 命題 3.5 を証明せよ。

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{1+t^2}{2} \\ \sin x &= \sin 2 \left(\frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \cos 2 \left(\frac{x}{2} \right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

なので,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

となり有理関数の積分に帰着できる。

演習問題 3.4 次の関数の不定積分を求めよ。

- | | | |
|------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| (1) $\sin x \cos x$ | (2) $\sin^3 x$ | (3) $\frac{1}{\cos x}$ |
| (4) $\frac{1}{\tan x}$ | (5) $\frac{1}{1 + \sin x}$ | (6) $\frac{1}{\sin x - \cos x}$ |

(1) 三角関数は積の形になっているときは和に直すことで積分が簡単になる場合が多い。この場合は和を積に直すことは倍角公式 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ を適応することに対応する。

$$\int \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x$$

(2) 積を和に直すことを繰り返し実行すると, または直接 3 倍角の公式を適用すると,

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

となるので。

$$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x$$

別の方法として, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ と見て $u = \cos x$ と変数変換してもできる。

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin x(1 - \cos^2 x) \, dx = -\int \{1 - u^2\} \, du \\ &= \frac{1}{3} u^3 - u = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x \end{aligned}$$

(3) $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} \, dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \left\{ \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right\} \, dt \\ &= \log|1+t| - \log|1-t| = \log \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| - \log \left| 1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

(4) $\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ なので $t = \sin x$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\tan x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{1}{t} \, dt = \log|\sin x|$$

(5) $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin x} \, dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{2}{(1+t)^2} \, dt \\ &= -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

(6) $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x - \cos x} \, dx &= \int \frac{2}{t^2 + 2t - 1} \, dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t - \sqrt{2} + 1} - \frac{1}{t + \sqrt{2} + 1} \right) \, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{2} + 1 \right| - \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2} + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

演習問題 3.5 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

(3) $\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

(5) $\sqrt{1-x^2}$

(1) $\sqrt{2-3x^2} = \sqrt{3\left(\frac{2}{3}-x^2\right)} = \sqrt{3}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - x^2}$ と変形できるので $x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin t$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{3}} \, dt = \frac{1}{\sqrt{3}} t = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

(2) $3 + 2x - x^2 = 4 - x^2 + 2x - 1 = 2^2 - (x - 1)^2$ となるので $u = x - 1$ とおくと積分は

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2 - u^2}} du$$

となる。 $u = 2 \sin t$ において置換積分を実行する。

$$I = \int dt = t = \arcsin \frac{u}{2} = \arcsin \left(\frac{x-1}{2} \right)$$

(3) $\sqrt{3x^2 - 2} = \sqrt{3 \left(x^2 - \frac{2}{3} \right)} = \sqrt{3} \sqrt{x^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2}$ と変形できるので $x = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sin t}$ とい

て置換積分を実行する。 $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}$, $\sqrt{3x^2 - 2} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{\sin^2 t} - \frac{2}{3}} = \sqrt{2} \frac{\cos t}{\sin t}$ より

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{3x^2 - 2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sin t} \sqrt{2} \frac{\cos t}{\sin t}} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}x} \right) \end{aligned}$$

(4) $x = 2 \tan t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\cos^2 t}$ であり, $x^2 + 4 = 4(\tan^2 t + 1) = \frac{4}{\cos^2 t}$ なので, 積分は

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \int \frac{\cos t}{2} \frac{2}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt$$

となる。前問 (3) より

$$= \log \left| 1 + \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right| - \log \left| 1 - \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right|$$

となるので $t = \arctan \frac{x}{2}$ を代入して

$$= \log \left| 1 + \tan \left(\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right| - \log \left| 1 - \tan \left(\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right|$$

(5) $x = \sin t$ において置換積分を実行する。途中 $\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$ を用いる。

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} dx &= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int \{\cos 2t + 1\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2} \right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$ に $t = \arcsin t$ を代入した, $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} (\sin 2 \arcsin x)$ も勿論正解である。

演習問題 3.7 $x \geq 1$ のとき $I_2 = \pi + I_1$ を示せ。

不定積分の結果が正しいとすれば

$$F(x) = 2 \arctan(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \arcsin \frac{1}{x}$$

とおけば $F'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = 0$ となるので $F(x)$ は定数である。 $x = 1$ を代入すると

$$F(1) = 2 \arctan(1 + \sqrt{1^2 - 1}) + \arcsin \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

となり示されるが、これは積分の結果を使っているので方法に不満がある。ここでは積分の結果を使わずに逆三角関数の性質を用いて示そう。

$a = \arctan(x + \sqrt{x^2 - 1})$ とおくと $x + \sqrt{x^2 - 1} = \tan a$ ($-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$) である。また $b = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x}$ とおくと $\frac{1}{x} = \sin 2b$ ($-\frac{\pi}{2} \leq 2b \leq \frac{\pi}{2}$) である。

$$\frac{\pi}{2} - b = a$$

を示せばよい。今 $x \geq 1$ より $b > 0$ である。よって $0 \leq \frac{\pi}{2} - b < \frac{\pi}{2}$ が成立している。このとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \tan a$$

が示されれば証明が終わる。

$$x = \frac{1}{\sin 2b} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \tan a &= x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{\sin 2b} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2b} - 1} = \frac{1}{\sin 2b} + \sqrt{\frac{\cos^2 2b}{\sin^2 2b}} \\ &= \frac{1}{\sin 2b} + \frac{\cos 2b}{\sin 2b} = \frac{\cos^2 b + \sin^2 b}{2 \sin b \cos b} + \frac{\cos^2 b - \sin^2 b}{2 \sin b \cos b} \\ &= \frac{2 \cos^2 b}{2 \sin b \cos b} = \frac{\cos b}{\sin b} \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos b - \cos \frac{\pi}{2} \sin b}{\cos \frac{\pi}{2} \cos b + \sin \frac{\pi}{2} \sin b} = \frac{\cos b}{\sin b} \end{aligned}$$

よって $\tan a = \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ が示された。

演習問題 3.8 今までは学んだ事に対応する演習問題で、演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚(?)を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない(?)。

次の関数の不定積分を求めよ。

- | | | |
|--|---|--|
| (1) $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ | (2) $\cos^2 x - \sin^2 x$ | (3) $\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ |
| (4) $x \arcsin x$ | (5) $\frac{\cos 2x}{e^{3x}}$ | (6) xe^{-x} |
| (7) $x \cos x$ | (8) $x^2 \sin x$ | (9) e^{3x+1} |
| (10) $2x \arctan x$ | (11) $\log(2x+1)$ | (12) $\frac{1}{x(\log x)^n}$ |
| (13) $x^2 \log x$ | (14) xe^{2x^2+3} | (15) $\frac{e^x}{x} + e^x \log x$ |
| (16) $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ | (17) $(2x+1) \sin(x^2+x+1)$ | (18) $\cos^n x \sin x$ |
| (19) $(ax^2+bx+c)e^x$ | (20) $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$ | (21) $\sin(\log x)$ |
| (22) $x^3 e^x$ | (23) $x^4 e^x$ | (24) $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ |
| (25) $\frac{1}{1+x^2}$ | (26) $\frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$ | (27) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ |
| (28) $\frac{1}{\cos^8 x}$ | (29) $\frac{1}{\sin x \cos^5 x}$ | (30) $\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$ |
| (31) $\frac{x}{\sqrt{a-x}}$ | (32) $\frac{1}{3+\cos x}$ | (33) $\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$ |
| (34) $\frac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$ | (35) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | (36) $\sqrt{x^2-1}$ |
| (37) $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ | (38) $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ | (39) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ |
| (40) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$ | (41) $\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ | (42) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$ |
| (43) $\frac{1}{4+x^2}$ | (44) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ | (45) $\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ |
| (46) $3x^2 e^{x^3+1}$ | (47) $\frac{1}{x^3(x+1)}$ | (48) $\frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$ |
| (49) $\frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$ | (50) $\frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$ | (51) $\frac{3}{x^3-1}$ |
| (52) $\frac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$ | (53) $\frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$ | (54) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ |
| (55) $\frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ | (56) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ | (57) $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ |
| (58) $\frac{1}{2-\tan^2 x}$ | (59) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ | (60) $\frac{\cos x}{\sin^n x}$ |
| (61) $\frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$ | (62) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | (63) $\frac{\log(\log x)}{x}$ |
| (64) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ | (65) $\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$ | (66) $\frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$ |
| (67) $\frac{12}{x^3-8}$ | (68) $\frac{\sin x}{1+\sin x}$ | (69) $\sin 4x$ |
| (70) $\frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$ | (71) $\frac{x^2}{1+x^2} \arctan x$ | (72) $\frac{\sin x}{3+\tan^2 x}$ |
| (73) $\log(1+\sqrt{x})$ | (74) $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ | (75) $3x^2(x^3+5)^6$ |

$$(76) \frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$$

$$(77) \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(78) e^{ax} \cos bx$$

$$(79) e^{ax} \sin bx$$

問題が長いので解説の前に被積分関数をもう一度書いておく。

(1) $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$: いきなり「ルートのなかの2次式」を解く方法でやってもできるが、 $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x+x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -x\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - x\sqrt{1-x^2}$ と変形してから考えたほうが簡単かもしれない。 $t = 1 - x^2$ とおくと $\frac{dt}{dx} = -2x$ である。

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \left\{ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - x\sqrt{1-x^2} \right\} dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{t}} - x\sqrt{t} \right) \left(-\frac{1}{2x} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} \right) = -\frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3} \end{aligned}$$

(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$: 三角関数の積は和に直すというのが一般的な考え方だが、この場合は加法定理の形そのものである。

$$\int \{ \cos^2 x - \sin^2 x \} dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$$

(3) $\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$: $\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^{3/2}}$ と見ると $u = 1 + x^2$ と置けばよいことに気づくだろう。

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du = -\frac{1}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(4) $x \arcsin x$: 部分積分法。

$$I = \int x \arcsin x dx = \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \arcsin x dx = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

となるが、第2項の積分は $x = \sin t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \sin^2 t dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \sin t \cos t \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

となるので

$$I = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2}$$

(5) $\frac{\cos 2x}{e^{3x}}$: 部分積分を2回、一般的な形を後の(78)で考える。

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-3x} \cos 2x dx = \int \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right)' \cos 2x dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \cos 2x - \frac{2}{3} \int e^{-3x} \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{3} e^{-3x} \cos 2x - \frac{2}{3} \int \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right)' \sin 2x dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \cos 2x + \frac{2}{9} e^{-3x} \sin 2x - \frac{4}{9} I \end{aligned}$$

となるので、整理すると

$$I = \frac{1}{13} (-3e^{-3x} \cos 2x + 2e^{-3x} \sin 2x)$$

(6) xe^{-x} : 部分積分法。

$$\int xe^{-x} dx = \int x(-e^{-x})' dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

(7) $x \cos x$: 部分積分法。

$$\int x \cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$$

(8) $x^2 \sin x$: 部分積分法 2 回。

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= \int x^2(-\cos x)' dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x(\sin x)' dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \end{aligned}$$

(9) e^{3x+1} : 簡単な置換積分法。 $t = 3x + 1$ とおく。

$$\int e^{3x+1} dx = \int \frac{1}{3} e^t dt = \frac{1}{3} e^t = \frac{1}{3} e^{3x+1}$$

(10) $2x \arctan x$: 部分積分法。

$$I = \int 2x \arctan x dx = \int (x^2)' \arctan x dx = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

ここで

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \left\{ 1 - \frac{1}{1+x^2} \right\} dx = x - \arctan x$$

なので

$$I = x^2 \arctan x - x + \arctan x$$

(11) $\log(2x+1)$: 簡単な置換積分法 + 部分積分法。 $t = 2x + 1$ とおく。

$$\int \log(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int \log t dt = \frac{1}{2} (t \log |t| - t) = \frac{1}{2} ((2x+1) \log |2x+1| - (2x+1))$$

(12) $\frac{1}{x(\log x)^n}$: $\frac{1}{x(\log x)^n} = (\log x)' \frac{1}{(\log x)^n}$ と考えると…。 $t = \log x$ とおく。 $n = 1$ のときは

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log |\log x|$$

$n \neq 1$ のときは

$$\int \frac{1}{x(\log x)^n} dx = \int \frac{1}{t^n} dt = \frac{t^{1-n}}{1-n} = \frac{(\log x)^{1-n}}{1-n}$$

(13) $x^2 \log x$: 部分積分法。

$$\int x^2 \log x dx = \int \left(\frac{1}{3}x^3\right)' \log x dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3$$

(14) xe^{2x^2+3} : 置換積分法。 $t = 2x^2 + 3$ とおく。

$$\int xe^{2x^2+3} dx = \int \frac{1}{4}e^t dt = \frac{1}{4}e^{2x^2+3}$$

(15) $\frac{e^x}{x} + e^x \log x$: 一方の関数を部分積分すると他の関数と打ち消しあって...

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{x} + e^x \log x dx &= \int \frac{e^x}{x} dx + \int (e^x)' \log x dx = \int \frac{e^x}{x} dx + e^x \log x - \int \frac{e^x}{x} dx \\ &= e^x \log x \end{aligned}$$

(16) $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$: この様な問題の場合試行錯誤でやるしかない。色々な置き方を試してうまくいくものを探す。まず思いつくのは $t = \frac{x}{x+1}$ とおくことだろう。しかしこれを実行すると(各自計算してみることに)、 $\int \frac{2t}{(1-t^2)^2} \arcsin \sqrt{t} dt$ となりこの積分は難しそうである。そこで

$t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ とおくと $\int t \frac{2 \sin t}{\cos^3 t} dt$ となる。 $(\tan^2 t)' = \frac{2 \sin t}{\cos^3 t}$ に気が付くと部分積分を実行して...

$t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ とおくと $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \sin t$ より $\frac{x}{x+1} = \sin^2 t$ である。これを x について解くと $x = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} = \tan^2 t$ である。 $dx = (\tan^2 t)' dt$ より

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = \int t (\tan^2 t)' dt = t \tan^2 t - \int \tan^2 t dt$$

となる。

$$\begin{aligned} \int \tan^2 t dt &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \left\{ \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right\} dx \\ &= \tan t - t \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx &= t \tan^2 t - \tan t + t \\ &= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \end{aligned}$$

(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1) : (2x+1)\sin(x^2+x+1) = (x^2+x+1)'\sin(x^2+x+1)$ なので...。
 $t = x^2 + x + 1$ とおく。

$$\int (2x+1)\sin(x^2+x+1) dx = \int \sin t dt = -\cos t = -\cos(x^2+x+1)$$

(18) $\cos^n x \sin x : \cos^n x \sin x = -\cos^n x (\cos x)'$ なので...。
 $t = \cos x$ とおく。

$$\int \cos^n x \sin x dx = -\int t^n dt = -\frac{1}{n+1}t^{n+1} = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x$$

(19) $(ax^2+bx+c)e^x : \text{部分積分法 2 回。}$

$$\begin{aligned} \int (ax^2+bx+c)e^x dx &= \int (ax^2+bx+c)(e^x)' dx = (ax^2+bx+c)e^x - \int (2ax+b)(e^x)' dx \\ &= (ax^2+bx+c)e^x - (2ax+b)e^x + \int 2ae^x dx = (ax^2+(b-2a)x+c-b+2a)e^x \end{aligned}$$

(20) $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} : (16)$ で述べたように、どう変数変換するかは試行錯誤でやるしかない。少し積分に慣れれば、 $\arcsin x$ を消すという考え方で、「ルートの中の2次式」という見方からも、次のようにおくのは気がつくと思う。この解説を見なくても自分でできた人はかなり積分に精通しつつあるといえる。

$t = \arcsin x$ とおくと、 $x = \sin t$ より $1-x^2 = \cos^2 t$ である。

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{t}{\cos^2 t} dt = \int t(\tan t)' dt = t \tan t - \int \tan t dt \\ &= t \tan t + \log |\cos t| = \frac{t \sin t}{\cos t} + \frac{1}{2} \log |\cos t|^2 \\ &= \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log |1-x^2| \end{aligned}$$

(21) $\sin(\log x) : t = \log x$ とおき $\int e^t \sin t dt$ と変形。(79) 参照。

$$\begin{aligned} I &= \int e^t \sin t dt = \int (e^t)' \sin t dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t dt \\ &= e^t \sin t - e^t \cos t + \int e^t \sin t dt = e^t \sin t - e^t \cos t + I \end{aligned}$$

となるので

$$\int \sin(\log x) dx = \frac{x(\sin(\log x) - \cos(\log x))}{2}$$

(22) $x^3 e^x : \text{部分積分。}$

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= \int x^3 (e^x)' dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \int 6x e^x dx \right) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x + 6) e^x \end{aligned}$$

(23) $x^4 e^x$: 部分積分。

$$\begin{aligned}\int x^4 e^x dx &= x^4 e^x - \int 4x^3 e^x dx = (x^4 - 4x^3) e^x + \int 12x^2 e^x dx \\ &= (x^4 - 4x^3 + 12x^2) e^x - \int 24x e^x dx = (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) e^x\end{aligned}$$

(24) $\frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$: 因数分解が問題。やり方は以前やった $x^4 + 1$ と同じで, $x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$ と 2 乗の差にして因数分解を実行する。あとは有理関数の積分の定石で部分分数展開して...

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{x+1}{x^2 + x + 1} - \frac{x-1}{x^2 - x + 1} \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} (\log(x^2 + x + 1) - \log(x^2 - x + 1)) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \right)\end{aligned}$$

(25) $\frac{1}{1+x^2}$: $x = \tan t$ と置換積分。

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int dt = t = \arctan x$$

(26) $\frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x^2+1}$ と部分分数展開。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)} dx &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2+1} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\log|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right)\end{aligned}$$

(27) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」である。三角関数を用いる方法, 無理式を用いる方法のどちらでもできるが, 計算の難度は異なる。

$x = 2 \sin t$ とおく。

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int dt = t = \arcsin \left(\frac{x}{2} \right)$$

(28) $\frac{1}{\cos^8 x}$: $I_n = \int \frac{1}{\cos^n x} dx$ とおき漸化式を求める。

$$\begin{aligned}I_n &= \int \left\{ \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^n x} \right\} dx = I_{n-2} + \int \sin x \left(\frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} x} \right)' dx \\ &= \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1}}\end{aligned}$$

また

$$I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (\tan x)' dx = \tan x$$

漸化式を繰り返し適用すれば求まる。

$$\begin{aligned} I_8 &= \frac{6}{7}I_6 + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} = \frac{6}{7}\left(\frac{4}{5}I_4 + \frac{\sin x}{5\cos^5 x}\right) + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} \\ &= \frac{6}{7}\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}I_2 + \frac{\sin x}{3\cos^3 x}\right) + \frac{6}{7}\frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} \\ &= \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{6}{7}\frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} \end{aligned}$$

(29) $\frac{1}{\sin x \cos^5 x}$: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ においても計算できるが計算が複雑になるので、他の方法がある場合はそれで計算したほうがよい。この場合は $t = \tan x$ とおいた方が計算は簡単である。一般に $\sin x$ と $\cos x$ の偶数乗、例えば $\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x$ などは $\tan x$ で表すことができる。

$t = \tan x$ とおくと $I = \int \frac{1}{\sin x \cos^5 x} \cos^2 x dt = \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dt$ となる。 $\sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{t}{1 + t^2}$, $\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$ となるので $I = \int \frac{(1+t^2)^2}{t} dt$ となる。

$$I = \int \frac{1}{\sin x \cos^5 x} dx = \int \left\{ \frac{1}{t} + 2t + t^3 \right\} dt = \log |\tan x| + \tan^2 x + \frac{1}{4} \tan^4 x$$

(30) $\frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}$: これは $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおくしかないようである。 $\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $1 + \sin x = \frac{(1+t)^2}{1+t^2}$, $1 + \cos x = \frac{2}{1+t^2}$ なので

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{(1+t)^2}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

(31) $\frac{x}{\sqrt{a-x}}$: $t=a-x$ とおくと...

$$\int \frac{x}{\sqrt{a-x}} dx = \int \frac{a-t}{\sqrt{t}(-1)} dt = \frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a-x}$$

(32) $\frac{1}{3 + \cos x}$: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\int \frac{1}{3 + \cos x} dx = \int \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{x}{2}\right)$$

(33) $\frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x}$: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{2t}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2(t+1)} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2t}{(t+1)(1+t^2)} dt \\ &= \int \left\{ \frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} \right\} dt = \frac{1}{2} \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + \frac{x}{2} - \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| \end{aligned}$$

(34) $\frac{1}{(e^x + e^{-x})^4}$: $t = e^x$ とおくと, $\int \frac{t^3}{(t^2 + 1)^4} dt$ となる。 $\frac{t^3}{(t^2 + 1)^4} = \frac{t^3 + t}{(t^2 + 1)^4} - \frac{t}{(t^2 + 1)^4} = \frac{t}{(t^2 + 1)^3} - \frac{t}{(t^2 + 1)^4}$ なので...

$$\int \frac{1}{(e^x + e^{-x})^4} dx = \int \left\{ \frac{t}{(t^2 + 1)^3} - \frac{t}{(t^2 + 1)^4} \right\} dt = \frac{1}{6(t^2 + 1)^3} - \frac{1}{4(t^2 + 1)^2} \\ = -\frac{3e^{2x} + 1}{12(e^{2x} + 1)^3}$$

(35) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: 「ルートの中の2次式」。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

(36) $\sqrt{x^2-1}$: 「ルートの中の2次式」。

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{x^2-1}+x)$$

(37) $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$: 「ルートの中の2次式」。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \log(\sqrt{x^2-a^2}+x)$$

(38) $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$: 「ルートの中の2次式」。 $x = \tan t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$, $1+x^2 = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \cos t \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dx = -\frac{1}{\sin t}$$

$x = \tan t$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ なので

$$= -\frac{1}{\tan t \cos t} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$t = \arctan x$ を直接代入して $-\frac{1}{\sin(\arctan x)}$ でも正解である。

(39) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$: 「ルートの中の2次式」。

$x = \tan t$ とおく。

$$I = \int \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx = \int \cos^3 t \left(1 - \frac{\sin 2t}{\cos^2 t}\right) \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \left\{ \cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t} \right\} dt \\ = \int \left\{ \cos t - \frac{1-\cos^2 t}{\cos t} \right\} dt = \int \left\{ 2\cos t - \frac{1}{\cos t} \right\} dt = 2\sin t - \int \frac{1}{\cos t} dt$$

$J = \int \frac{1}{\cos t} dt$ は $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ として計算してもよいが、変数を x に戻すと

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) \quad \text{なので}$$

$$I = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \log\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$$

(40) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$: 「ルートの中の2次式」 $x^2+2x-1 = (x+1)^2-2$ なので $u = x+1$

とおき、更に $u = \frac{\sqrt{2}}{\sin t}$ とおく。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}} dx &= - \int \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{2} \cos t} \frac{\sqrt{2} \cos t}{\sin^2 t} dt = - \frac{1}{\sqrt{2}} \int dt \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2}} t = - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right) \end{aligned}$$

(41) $\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$: 「ルートの中の2次式」 $x = a \tan t$ とおくと、 $I = \frac{1}{a^4} \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt$ となるので $u = \sin t$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} dx &= \frac{1}{a^4} \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt = \frac{1}{a^4} \int \frac{\cos t(1-\sin^2 t)}{\sin^4 t} dt = \frac{1}{a^4} \int \left\{ \frac{1}{u^4} - \frac{1}{u^2} \right\} du \\ &= \frac{1}{a^4} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{3u^2} \right) = \frac{1}{a^4} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{3\sin^3 t} \right) \end{aligned}$$

ここで $x = a \tan t$, $\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t}$ より $\frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$ なので

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4 x} - \frac{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}{3a^4 x^3}$$

(42) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$: $t = \sqrt{1+x^6}$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^6}} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{6} \int \left\{ \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right\} dt \\ &= \frac{1}{6} (\log|t-1| - \log|t+1|) = \frac{1}{6} \left(\log\left(\sqrt{1+x^6}-1\right) - \log\left(\sqrt{1+x^6}+1\right) \right) \end{aligned}$$

(43) $\frac{1}{4+x^2}$: $x = 2 \tan t$ とおくと...

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(44) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$: $t = \sqrt[3]{x+1}$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx &= \int \frac{3t^2}{1+t} dt = 3 \int \left\{ t-1 + \frac{1}{1+t} \right\} dt \\ &= \frac{3}{2} (x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \log\left((x+1)^{\frac{1}{3}}+1\right) \end{aligned}$$

(45) $\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$: これは有理関数の積分。部分分数展開して...

$\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{g(x)}{(x^2+1)^2}$ ($g(x)$ は 3 次式) とおき $A, B, g(x)$ を求める。
右辺を通分して分子を比較すると

$$x(x^2+3) = A(x+1)(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1) + g(x)(x-1)(x+1)$$

与式に $x = 1$ を代入すると $A = \frac{1}{2}$, $x = -1$ を代入すると $B = \frac{1}{2}$ が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{(x^2+1)^2} &= \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2-1} \\ &= \frac{-x}{x^2-1} \frac{x^2+3-(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x}{x^2-1} \frac{(x^2-1)(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x((x^2+1)+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

より

$\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} \int \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} dx &= \int \left\{ \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\log|x+1| + \log|x-1| - \log(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

(46) $3x^2e^{x^3+1}$: 典型的な置換積分。慣れてきた人は見た瞬間に分かると思う。

$$\int 3x^2e^{x^3+1} dx = e^{x^3+1}$$

(47) $\frac{1}{x^3(x+1)}$: これは有理関数の積分。

$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{g(x)}{x^3}$ ($g(x)$ は 2 次式) とおき, $A, g(x)$ を求める。右辺を通分して分子を比較すると

$$1 = Ax^3 + g(x)(x+1)$$

与式に $x = -1$ を代入すると $A = -1$ を得る。

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x^3} &= \frac{1}{x^3(x+1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^3(x+1)} + \frac{x^3}{x^3(x+1)} = \frac{x^3+1}{x^3(x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^3(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ と部分分数展開できるので

$$\int \frac{1}{x^3(x+1)} dx = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

(48) $\frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}$: これも有理関数の積分。ただし部分分数展開の後 $\frac{1}{(x^2 + 2)^2}$ の積分が出てくるので、分母の次数を下げる変形が必要になる。 $n = 1, a = \sqrt{2}$ なので次数を下げる式は

$$J_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2 + 2} + J_1 \right)$$

となる。 $\frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{g(x)}{(x^2 + 2)^2}$ ($g(x)$ は 3 次式) とおき、 $A, g(x)$ を求める。右辺を通分して分子を比較すると

$$2x^2 + x + 4 = A(x^2 + 2)^2 + g(x)x$$

$x = 0$ を代入すると $A = 1$ を得る。

$$g(x) = \frac{1}{x} (2x^2 + x + 4 - (x^2 + 2)^2) = -x^3 - 2x + 1 = -x(x^2 + 2) + 1$$

より $\frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{(x^2 + 2)^2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} dx &= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{(x^2 + 2)^2} \right\} dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2 + 2) + \frac{x}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

(49) $\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - x}{(x^2 + 1)^3}$: と部分分数展開する。 $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx$ 等を分母の次数を下げて計算する

ので、分母の次数を下げる変形が必要になる。 $J_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$ とすると $J_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{(x^2 + 1)^2} + 3J_2 \right)$,

$J_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + J_1 \right)$ である。

$x^4 - x^3 - 3x^2 - x$ を $x^2 + 1$ で割って行くと

$$x^4 - x^3 - 3x^2 - x = (x^2 + 1)^2 - (x + 5)(x^2 + 1) + 4$$

なので $\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x + 5}{(x^2 + 1)^2} + \frac{4}{(x^2 + 1)^3}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - x}{(x^2 + 1)^3} dx &= \int \left\{ \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x + 5}{(x^2 + 1)^2} + \frac{4}{(x^2 + 1)^3} \right\} dx \\ &= \int \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx - 5 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + 4 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx \\ &= J_1 + \frac{1}{2(x^2 + 1)} - 5J_2 + 4J_3 = J_1 + \frac{1}{2(x^2 + 1)} - 5J_2 + \left(\frac{x}{(x^2 + 1)^2} + 3J_2 \right) \\ &= \frac{1}{2(x^2 + 1)} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + J_1 - 2J_2 \\ &= \frac{1}{2(x^2 + 1)} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + J_1 - \left(\frac{x}{x^2 + 1} + J_1 \right) \\ &= \frac{1}{2(x^2 + 1)} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

(50) $\frac{x^4 - x^3 + 2x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1}$: これも有理関数の積分, 分母を因数分解して...

$f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ とおくと $f(1) = 0$ なので $x - 1$ を因数に持つ。 $x - 1$ で割った結果の多項式も $x - 1$ で $x = 1$ を解にもつので $f(x) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)$ と因数分解できる。

$$\frac{x^4 - x^3 + 2x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{(x^4 - x^3 - x + 1) + 3x}{x^4 - x^3 - x + 1} = 1 + \frac{3x}{x^4 - x^3 - x + 1}$$

$\frac{3x}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{f(x)}{(x - 1)^2} + \frac{g(x)}{x^2 + x + 1}$ ($f(x), g(x)$ は 1 次式) とおき, $f(x), g(x)$ を求める。
右辺を通分して分子を比較して

$$3x = f(x)(x^2 + x + 1) + g(x)(x - 1)^2 \quad (8)$$

式 (1) に $x = 1$ を代入して $f(1) = 1$ を得る。式 (1) の両辺を x で微分して

$$3 = f'(x)(x^2 + x + 1) + f(x)(2x + 1) + g'(x)(x - 1)^2 + g(x)2(x - 1) \quad (9)$$

式 (2) に $x = 1$ を代入して $3 = 3f'(1) + 3f(1)$ より $f'(1) = 0$ を得る。 $f(x) = 1$ より $g(x) = 1$, よって $\frac{x^4 - x^3 + 2x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} = 1 + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x^2 + x + 1}$ と部分分数展開できる。 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ なので $t = x + \frac{1}{2}$ とおくと $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt$ となるので

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - x^3 + 2x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} dx &= \int \left\{ 1 + \frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\} dx \\ &= x - \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

(51) $\frac{3}{x^3 - 1}$: これも有理関数の積分。 $\frac{3}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{g(x)}{x^2 + x + 1}$ ($g(x)$ は 1 次式) とおく。
右辺を通分して分子を比較すると

$$3 = A(x^2 + x + 1) + g(x)(x - 1)$$

$x = 1$ を代入して $A = 1, g(x) = -(x + 2)$ を得る。 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ なので $t = x + \frac{1}{2}$

とおくと $\int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{t + \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt$ となる。

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^3 - 1} dx &= \int \left\{ \frac{1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} \right\} dx \\ &= \log|x - 1| - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

(52) $\frac{1}{e^x + 4e^{-x} + 3}$: $t = e^x$ とおくと, $I = \int \frac{1}{t^2 + 3t + 4} dt$ となるので...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + 4e^{-x} + 3} dx &= \int \frac{1}{t^2 + 3t + 4} dt = \int \frac{1}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \left(e^x + \frac{3}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

(53) $\frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x} : t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ においてもできるが (29) で述べた方法でもできる。 $t = \tan x$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 3\cos^2 x} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int \frac{t^2}{4+t^2} \frac{1}{1+t^2} dx = \frac{1}{3} \int \left\{ \frac{4}{4+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right\} dt \\ &= \frac{1}{3} \left(4 \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) - \arctan(\tan x) \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) - \frac{x}{3} \end{aligned}$$

(54) $\frac{1}{e^x + e^{-x}} : t = e^x$ とおくと...

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t = \arctan(e^x)$$

(55) $\frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} : \text{倍角公式で 2 倍角の形に直した方が計算は簡単かもしれない。 } t = \cos 2x \text{ とおく。}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx &= \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x + 1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= -\frac{1}{2} \arctan(\cos 2x) \end{aligned}$$

(56) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} : t = \sqrt{1-x}$ とおくと...

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x}$$

(57) $\frac{\sqrt{x}}{1+x} : t = \sqrt{x}$ とおくと...

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2(t - \arctan t) = 2\sqrt{x} - 2 \arctan(\sqrt{x})$$

(58) $\frac{1}{2 - \tan^2 x} : t = \tan x$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 - \tan^2 x} dx &= \int \frac{1}{(2-t^2)(1+t^2)} dt = \frac{1}{3} \int \left\{ \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2-2} \right\} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+t^2} dt + \frac{1}{6\sqrt{2}} \int \left\{ \frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-\sqrt{2}} \right\} dt \\ &= \frac{1}{3} \arctan t + \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(\log|t+\sqrt{2}| - \log|t-\sqrt{2}| \right) \\ &= \frac{1}{3} x + \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(\log|\arctan x + \sqrt{2}| - \log|\arctan x - \sqrt{2}| \right) \end{aligned}$$

(59) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$: 「ルートの中の2次式」 $x = 2 \sin t$ とおく。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int dt = t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(60) $\frac{\cos x}{\sin^n x}$: $\frac{\cos x}{\sin^n x} = \frac{(\sin x)'}{\sin^n x}$ と見て...

$$\int \frac{\cos x}{\sin^n x} dx = \frac{\sin^{1-n} x}{1-n}$$

(61) $\frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$: 「ルートの中の2次式」 $\sqrt{1-x^2} = t(x+1)$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}} dx &= -2 \int \frac{1}{t^2+3} dt = -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \end{aligned}$$

(62) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$: 「ルートの中の2次式」 $\sqrt{x^2-1} = t-x$ とおくと...

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \log(\sqrt{x^2-1} + x)$$

(63) $\frac{\log(\log x)}{x}$: $\frac{\log(\log x)}{x} = (\log x)' \log(\log x)$ なので $t = \log x$ とおくと...

$$\int \frac{\log(\log x)}{x} dx = \int \log t dt = t \log t - t = \log x \log(\log x) - \log x$$

(64) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$: $\frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}} = \frac{1}{3} \frac{(a^3+x^3)'}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ と見て $t = a^3+x^3$ とおくと...

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt = \frac{1}{2} (a^3+x^3)^{\frac{2}{3}}$$

(65) $\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$: $t = \sqrt{1-x}$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}} dx &= 2 \int \frac{1}{t^2-2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left\{ \frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right\} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\log(\sqrt{1-x}-\sqrt{2}) - \log(\sqrt{1-x}+\sqrt{2}) \right) \end{aligned}$$

(66) $\frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$: $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}} dx &= -4 \int \frac{t^2}{t^4-1} dx = \int \left\{ \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \frac{2}{1+t^2} \right\} dt \\ &= \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right) - \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \end{aligned}$$

(67) $\frac{12}{x^3-8}$: 有理関数の積分。

$$\begin{aligned}\int \frac{12}{x^3-8} dx &= \int \left\{ \frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{x^2+2x+4} \right\} dx \\ &= \log|x-2| - \frac{1}{2} \log(x^2+2x+4) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

(68) $\frac{\sin x}{1+\sin x}$: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおくと...

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)} dt = \int \left\{ \frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right\} dt \\ &= 2 \arctan t + \frac{2}{t+1} = x - \frac{2}{\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}\end{aligned}$$

(69) $\sin 4x$: 簡単な置換積分。 $t = 4x$ とおく。

$$\int \sin 4x dx = \frac{1}{4} \int \sin t dt = \frac{1}{4} \cos 4x$$

(70) $\frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおくと...

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x(5+3\cos x)} dx &= \int \frac{t^2+1}{(t^2+4)(t-1)(t+1)} dt = \frac{1}{5} \int \left\{ \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{3}{t^2+4} \right\} dt \\ &= \frac{1}{5} \left(\log|t-1| - \log|t+1| + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{t}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{5} \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right| - \frac{1}{5} \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right| + \frac{3}{10} \arctan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(71) $\frac{x^2}{1+x^2} \arctan x$: $t = \arctan x$ とおき, $I = \int t(\tan t - t)' dt$ 変形して部分積分。

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx &= \int t \tan^2 t dt = \int t(\tan t - t)' dt = t(\tan t - t) - \int \{\tan t - t\} dt \\ &= t(\tan t - t) + \log|\cos t| + \frac{1}{2} t^2 \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \arctan^2 x + \log|\cos \arctan x|\end{aligned}$$

(72) $\frac{\sin x}{3+\tan^2 x}$: $\frac{\sin x}{3+\tan^2 x} = -\frac{(\cos x)'}{3+\tan^2 x}$ と見る。 $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ は \cos で表されるので $t = \cos x$ とおくと...

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{3+\tan^2 x} dx &= -\int \frac{t^2}{2t^2+1} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}} dt - \frac{1}{2} \int dt = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}t) - \frac{1}{2} t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2} \cos x) - \frac{1}{2} \cos x\end{aligned}$$

(73) $\log(1 + \sqrt{x}) : t = \sqrt{x}$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \log(1 + \sqrt{x}) dx &= 2 \int t \log(t+1) dt = \int (t^2)' \log(t+1) dt = t^2 \log(t+1) - \int \frac{t^2}{t+1} dt \\ &= t^2 \log(t+1) - \int \left\{ t - 1 + \frac{1}{t+1} \right\} dt \\ &= x \log(\sqrt{x} + 1) \end{aligned}$$

(74) $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} : t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ とおくと $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$ より $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$...。

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx = - \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{4}{(1+t^2)^2} dt - \int \frac{4}{1+t^2} dt$$

漸化式 $J_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t^2+1} + J_1 \right)$ を用いて

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2 \arctan t = (x+1) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(75) $3x^2(x^3+5)^6 : 展開して計算しても勿論できるが, t = x^3 + 5$ とおくと...

$$\int 3x^2(x^3+5)^6 dx = \int t^6 dt = \frac{(x^3+5)^7}{7}$$

(76) $\frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}} : 「ルートの中の 2 次式」, \sqrt{2+x-x^2} = t(2+x)$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}} dx &= - \int \frac{1}{t^2+4} dt = - \arctan \left(\frac{t}{2} \right) \\ &= - \arctan \left(\frac{1}{2} \sqrt{2-x} (1+x) \right) \end{aligned}$$

(77) $\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} : x = a \sin t$ とおくと...

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= a^2 \int \sin^2 t dt = a^2 \int \left\{ \frac{1-\cos 2t}{2} \right\} dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{a^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} \end{aligned}$$

(78) $e^{ax} \cos bx :$

(79) $e^{ax} \sin bx : 2 つまとめて考える。$

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx, \quad I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx$$

とおく。部分積分を行うことにより

$$I_1 = \int \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_2$$

を得る。同様に

$$I_2 = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1$$

が分かるので、連立方程式を解いて

$$I_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} (ae^{ax} \cos bx + be^{ax} \sin bx), \quad I_2 = \frac{1}{a^2 + b^2} (ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx)$$