解析学 I 対する追加説明 ♯1

- 近似に関して説明する。例として $y = f(x) = \log x$ を $x = 1$(のまわり) で近似することを考える。1 で近似するので $x = 1 + h$ とする。

- 最初は 1 次式で近似する。近似する 1 次式を $g_1(h) = A + Bh$ とする。$d_1(h) = f(1+h) - g_1(h)$ とおくとき
$$\lim_{h\to 0} \frac{d_1(h)}{h} = 0$$
を満たせばよい。

- $\lim\limits_{h\to 0} d_1(h) = 0$ が成立するので
$$\begin{aligned} 0 = \lim_{h\to 0} d_1(h) &= \lim_{h\to 0} \big(f(1+h) - g_1(h)\big) \\ &= \lim_{h\to 0} \big(\log(1+h) - (A+Bh)\big) \\ &= \log 1 - A = 0 - A \end{aligned}$$
よって $A = 0$ である。

- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d_1(h)}{h} = 0$ が成立するので
$$\begin{aligned} 0 = \lim_{h\to 0} \frac{d_1(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h) - (0+Bh)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} - B = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+h} - B = 1 - B \end{aligned}$$
よって $B = 1$ である。以上より求める 1 次式は
$$g_1(h) = 0 + h$$
である。x で書き直して
$$g_1(x-1) = x - 1$$
とも書ける。

- 次に 2 次式で近似する。近似する 2 次式を $g_2(h) = A + Bh + Ch^2$ とする。$d_2(h) = f(1+h) - g_2(h)$ とおくとき
$$\lim_{h\to 0} \frac{d_2(h)}{h^2} = 0$$
を満たせばよい。

- $\lim_{h \to 0} d_2(h) = 0$ が成立するので

$$
\begin{aligned}
0 = \lim_{h \to 0} d_2(h) &= \lim_{h \to 0} \bigl(f(1+h) - g_2(h)\bigr) \\
&= \lim_{h \to 0} \bigl(\log(1+h) - (A + Bh + Ch^2)\bigr) \\
&= \log 1 - A = 0 - A
\end{aligned}
$$

よって $A = 0$ である。

- $\lim_{h \to 0} \frac{d_2(h)}{h} = 0$ が成立するので

$$
\begin{aligned}
0 = \lim_{h \to 0} \frac{d_2(h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h) - (0 + Bh + Ch^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\log(1+h)}{h} - B - Ch\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{1+h} - B = 1 - B
\end{aligned}
$$

よって $B = 1$ である。

- $\lim_{h \to 0} \frac{d_2(h)}{h^2} = 0$ が成立するので

$$
\begin{aligned}
0 = \lim_{h \to 0} \frac{d_2(h)}{h^2} &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h) - (0 + h + Ch^2)}{h^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1 - 2Ch}{2h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h}}{2h} - C \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2h(1+h)} - C = -\frac{1}{2} - C
\end{aligned}
$$

よって $C = -\frac{1}{2}$ である。以上により求める 2 次式は

$$
g_2(h) = 0 + h - \frac{1}{2}h^2
$$

である。x で書き直して

$$
g_2(x-1) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2
$$

とも書ける。

- 次に 3 次式で近似する。近似する 3 次式を $g_3(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$ とする。$d_3(h) = f(1+h) - g_3(h)$ とおくとき

$$\lim_{h\to 0} \frac{d_3(h)}{h^3} = 0$$

を満たせばよい。

- $\lim_{h\to 0} d_3(h) = 0$ が成立するので

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{h\to 0} d_3(h) &= \lim_{h\to 0} \big(f(1+h) - g_3(h)\big) \\ &= \lim_{h\to 0} \big(\log(1+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3)\big) \\ &= \log 1 - A = 0 - A \end{aligned}$$

よって $A = 0$ である。

- $\lim_{h\to 0} \dfrac{d_3(h)}{h} = 0$ が成立するので

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{h\to 0} \frac{d_3(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h) - (0 + Bh + Ch^2 + Dh^3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\log(1+h)}{h} - B - Ch + Dh^2 \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+h} - B = 1 - B \end{aligned}$$

よって $B = 1$ である。

- $\lim_{h\to 0} \dfrac{d_3(h)}{h^2} = 0$ が成立するので

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{h\to 0} \frac{d_3(h)}{h^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h) - (0 + h + Ch^2 + Dh^3)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+h} - 1 - 2Ch - 3Dh^2}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\dfrac{1}{1+h} - \dfrac{1+h}{1+h}}{2h} - C - \frac{3}{2}Dh \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2h(1+h)} - C = -\frac{1}{2} - C \end{aligned}$$

よって $C = -\dfrac{1}{2}$ である。

- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d_3(h)}{h^3}=0$ が成立するので

$$
\begin{aligned}
0=\lim_{h\to 0}\frac{d_3(h)}{h^3} &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-(0+h-\frac{1}{2}h^2+Dh^3)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1+h-3Dh^2}{3h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1+h}{1+h}+h-3Dh^2}{3h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{3h^2(1+h)}-D=\frac{1}{3}-D
\end{aligned}
$$

  よって $D=\dfrac{1}{3}$ である。以上により求める 3 次式は

$$g_3(h)=0+h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3$$

  である。x で書き直して

$$g_3(x-1)=x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$$

  とも書ける。

- $g_1(h)$ と $g_2(h)$ の定数項および 1 次の項は等しく，$g_2(h)$ と $g_3(h)$ の定数項および 1 次の項，2 次の項は等しい。これは偶然ではなくどの様な関数に対しても等しい。

  即ち近似する 2 次式 $g_2(h)$ は近似する 1 次式 $g_1(h)$ とある定数 C を用いて

$$g_2(h)=g_1(h)+Ch^2$$

  と書ける。

  また近似する 3 次式 $g_3(h)$ は近似する 2 次式 $g_2(h)$ とある定数 D を用いて

$$g_3(h)=g_2(h)+Dh^3$$

  と書ける。

  このことから近似する 3 次式を求めれば，近似する 1 次式，2 次式は高次の項を切り捨てることにより求まる。