解析学 I に対する追加説明 $\sharp 3$

- テーラーの定理は次であった。

次を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ であり，これを**剰余項**と呼ぶ。

- 関数 f が何回でも微分可能で，$R_n \to 0\,(n \to \infty)$ が成立するとき，テイラーの定理から

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

が得られる。これを $x = a$ における**テーラー級数**という。

- だから「テーラー級数を求めよ」という問題は,

$$R_n \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{1}$$

を仮定すれば n **次導関数を求める**問題である。

- 条件 (1) が成立するとき，f は $x = a$ で**テーラー級数展開可能**というが，我々は通常このことを仮定する。

- 次の問題を考える

$f(x) = (x+2)\log(x+2)$ の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ。

- $x = 0$ におけるテーラー級数は上で $a = 0$ としたものなので,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

の形をしている。よって $f^{(k)}(x)$ を求めればよい。

- n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ の形を予想するため何回か微分してみる。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \log(x+2)+1 \\
f''(x) &= \frac{1}{x+2} \\
f^{(3)}(x) &= -(x+2)^{-2} \\
f^{(4)}(x) &= 2(x+2)^{-3} \\
f^{(5)}(x) &= -6(x+2)^{-4}
\end{aligned}
$$

- $6 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$ に気がつけば $n \geq 2$ に対し

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-2)!(x+2)^{-(n-1)} \tag{2}
$$

  が予想される。

- 式 (2) を数学的帰納法で証明しよう。

$$
f''(x) = \frac{1}{x+2} = (-1)^2(2-2)!(x+2)^{-(2-1)}
$$

  なので $n=2$ のとき成立している。

- $n=k$ のとき成立することを仮定する。即ち

$$
f^{(k)}(x) = (-1)^k (k-2)!(x+2)^{-(k-1)}
$$

  の成立を仮定する。与式を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' &= \left((-1)^k (k-2)!(x+2)^{-(k-1)}\right)' \\
&= (-1)^k (k-2)!(-(k-1))(x+2)^{-(k-1)-1} \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!(x+2)^{-k} \\
&= (-1)^{k+1}((k+1)-2)!(x+2)^{-((k+1)-1)}
\end{aligned}
$$

  となり，$n=k+1$ でも成立している。

- 式 (2) は $n=0$ および $n=1$ では成立していないことに注意すること。$n=0$ のときは

$$
f^{(0)}(x) = f(x) = (x+2)\log(x+2)
$$

  であるから $f^{(0)}(0) = 2\log 2$ である。

$n=1$ のときは

$$f'(x)=\log(x+2)+1$$

より $f'(0)=\log 2+1$ である。

$n\geq 2$ のときは

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n(n-2)!(x+2)^{-(n-1)}$$

より

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n(n-2)!2^{-(n-1)}$$

である。

- よって

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f^{(0)}(0)+f'(0)x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &=2\log 2+(\log 2+1)x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(k-2)!2^{-(k-1)}}{k!}x^k \\ &=\log 2+(\log 2+1)x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k-1}k(k-1)}x^k \end{aligned}$$

が得られる。

- 次に $a\neq 0$ の問題を考える

$f(x)=e^{5x}$ の $x=3$ におけるテーラー級数を求めよ。

最初の式の a に 3 を代入すればよいので，結果は

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k$$

という形をしている。

- 最初に n 次導関数を求める。$f'(x)=5e^{5x}$，$f''(x)=5^2e^{5x}$ なので

$$f^{(n)}(x)=5^ne^{5x}$$

と予想できる。

- 予想の成立は数学的帰納法によるが，ここでは省略し，成立を仮定する。
- $f^{(k)}(3) = 5^k e^{15}$ なので

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k e^{15}}{k!}(x-3)^k$$

  となる。