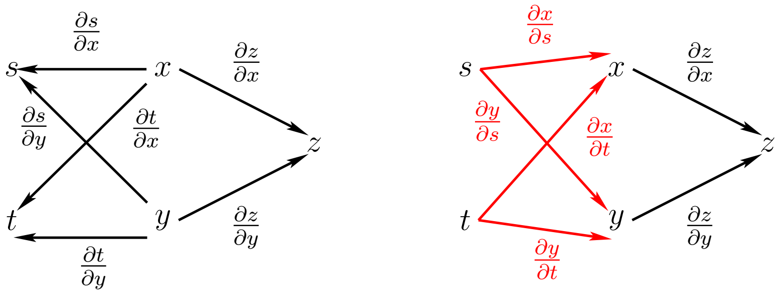
解析学 I に対する追加説明 ♯4

- ヤコビ行列を用いて計算する方法について解説しておく。
- $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2y^2$ を例に z_s, z_{ss} を求めてみよう。

  変数間の関係は下図左であって，下図右ではない。

  変数間に下図右のような関係が成立するかが問題であるが，実はほとんどの場合成立する。



- 最初に 1 変数の場合を考える。$y = f(x)$ に対し定義域全体では逆関数は存在しないが，点の周りなら「ほとんど」のところで存在する。きちんと書けば次のようになる。

- a を定義域の内点とし $f'(a) \neq 0$ とする。このとき a を含む開区間 U と $f(a)$ を含む開区間 W が存在して，f を U に制限した関数は

$$f : U \longrightarrow W$$

  全単射である。よって W から U への逆関数が存在する。

  これを**逆関数定理**という。

- 2 変数関数の場合は 2 変数関数 2 個の組に対し同様の定理が成立する。これを**逆関数定理**という。

  $x = x(s,t), y = y(s,t)$ を 2 変数関数とする。$\vec{s} = (s,t), \vec{x} = (x,y) = (x(s,t), y(s,t))$ とし，2 変数関数 2 個を組として写像 f を

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vec{s} \longmapsto \vec{x}$$

とする。(a,b) が定義域の内点で $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(a,b) \neq 0$ とする。(a,b) を含む開領域 U と $f(\vec{a}) = (x(a,b), y(a,b))$ を含む開領域 W が存在して f を U に制限した関数は

$$f : U \longrightarrow W$$

全単射である。よって W から U への逆関数が存在する。

- 1 変数関数の場合定数関数など特別の場合を除き「ほとんど」の点で $f'(x) \neq 0$ となる。2 変数関数の場合も「ほとんど」の関数の「ほとんど」の点で $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \neq 0$ となる。これは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = 0$ の解が s,t–平面内の曲線になることから分かる。

- $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \neq 0$ という条件が $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列が存在する条件になっていることを注意しておく。

- 問題に戻る。x_s, y_s を計算するため，$\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めその逆行列を計算する。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$$

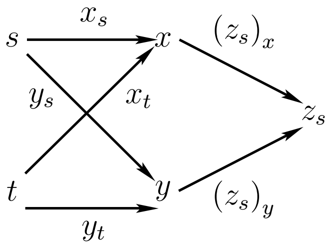
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} &= \frac{D(x,y)}{D(s,t)} \\
&= \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{4xy(x^2-y^2)}\begin{pmatrix} 2x^2y & -2y \\ -2xy^2 & 2x \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2xy(x^2-y^2)}\begin{pmatrix} x^2y & -y \\ -xy^2 & x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- よって

$$x_s = \frac{x^2y}{2xy(x^2-y^2)} = \frac{x}{2(x^2-y^2)}, \quad y_s = \frac{-xy^2}{2xy(x^2-y^2)} = \frac{-y}{2(x^2-y^2)}$$

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s = 1\frac{x}{2(x^2-y^2)} + 1\frac{-y}{2(x^2-y^2)} = \frac{1}{2(x+y)}$$

- $z_{ss} = (z_s)_s$ なので先ほどの図式で z を z_s に置き換えたものを考える。



$$z_{ss} = (z_s)_x x_s + (z_s)_y y_s$$

である。x_s, y_s はすでに求めてある。$z_s = \dfrac{1}{2(x+y)}$ なので

$$(z_s)_x = -\frac{1}{2(x+y)^2}$$
$$(z_s)_y = -\frac{1}{2(x+y)^2}$$

よって

$$\begin{aligned} z_{ss} &= -\frac{1}{2(x+y)^2}\frac{x}{2(x^2-y^2)} - \frac{1}{2(x+y)^2}\frac{-y}{2(x^2-y^2)} \\ &= -\frac{x-y}{4(x+y)^2(x-y)(x+y)} = -\frac{1}{4(x+y)^3} \end{aligned}$$