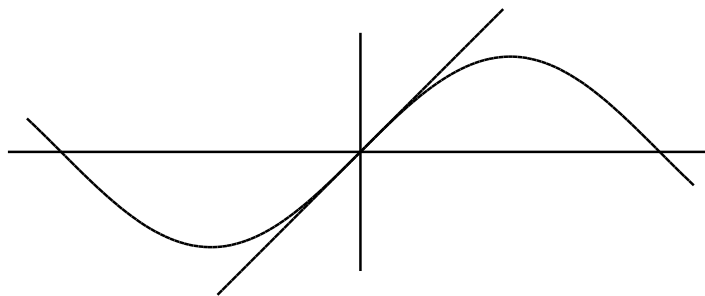


解析学 I に対する追加説明 #5

- 偏微分の基本的事項に関して再度説明しておく。
- 偏微分の前に 1 変数の微分に関して基礎事項を確認しておく。関数を微分するためには次の 3 つを理解していることが必要である。
 - (1) 基本的な関数の微分
 - (2) 積の微分法
 - (3) 合成関数の微分法
- どれも欠くことができないが、ここではそれらの事項を忘れたとき、どの様に考えるかという点について説明する。
- 一般に「丸暗記」は忘れやすいもので、色々な事項を関連させて理解しておくことが、「記憶」を確かなものにする。
- ここでは $y = \sin x$ の導関数を忘れたとする。どのように「思い出すか」だが、ここでは次を仮定しよう。
 - $\sin x$ の導関数は正確には憶えていないが、 $\pm \sin x, \pm \cos x$ のいずれかのような気がする。
 - $y = \sin x$ のグラフは分かる。
 - 導関数は接線の傾きを表すことは知っている。
- この 3 つから $(\sin x)' = \cos x$ が分かる。



- 図は $y = f(x) = \sin x$ のグラフと原点における接線を描いたものである。

導関数が接線の傾きを表すという事実から、原点での接線の傾きは正であることが読み取れる。即ち $f'(0) > 0$ となることが読み取れる。

$f'(0) > 0$ となるのは $\cos x$ しかないので, $f'(x) = \cos x$ である。

- 普段から何か当然知っているべき知識を忘れたとき, 何かを見るというのはひとつの方法であるが, このようにして, 可能であれば, 自分の知っている知識から, それを組み合わせるというのも大事な方法である。

今忘れるということは, また忘れる可能性があるということである。ここで紹介したように考えると, また起きたときにも対応ができるし, このようにして自分の知識を関連付けておくと忘れにくくなると思われる。

- 例で考える, ないしは例と照らし合わせるということも大切なことである。例えば合成関数の微分法が不確かだとする。

$y = (x^4 + 1)^2$ という例を考える。

この関数は $y = u^2$ と $u = x^4 + 1$ の合成関数と考えることができる。

ここで $y = x^8 + 2x^4 + 1$ なので

$$\frac{dy}{dx} = 8x^7 + 8x^3 = 8x^3(x^4 + 1)$$

$$\frac{dy}{du} = 2u = 2(x^4 + 1) \qquad \frac{du}{dx} = 4x^3$$

となるがこれより, この場合は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

が成立することが分かる。

- 「証明せよ」といわれたとき例をあげるのでは証明にはならないが, 定理そのものを思い出すとき例が有効に働くときも多い。
- 偏微分の話に戻ろう。ここでは「関数を微分する」という点に限って解説する。
- 最初に押さえておくべき点は

ある変数に関する偏微分をするときは他の変数は定数と見る

ということである。

このことが分かっているならば 1 変数関数の微分の知識が使える。
1 変数関数の知識で使えない (かもしれない) のは合成関数の微分だけである。

- $z = f(x, y) = x^3 \sin y + \log x + y^3$ を x で偏微分する。よくある間違いは

$$z_x = 3x^2 \sin y + \frac{1}{x} + y^3$$

である。 y は定数なので y^3 も定数であり、

$$z_x = 3x^2 \sin y + \frac{1}{x}$$

となる。

- 偏微分の計算で 2 つ目に押さえておくべきなのは

多変数関数の合成関数の微分法

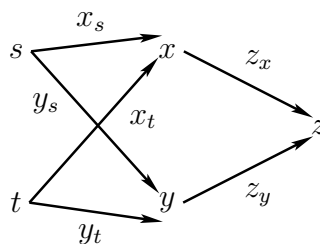
である。

- 多変数関数で合成関数の微分法を使うときは変数間のダイアグラムを書くことを推奨する。

$$z = \sin(x^2 + y^2), \quad x = s + t, \quad y = st$$

に対し z_s を求める。

ダイアグラムを書くと次図のようになっている。

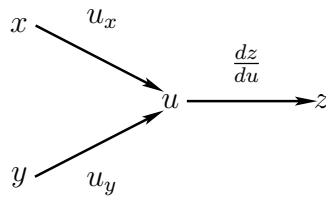


このとき

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s$$

が成立する。

- z_x を計算するために $u = x^2 + y^2$ とおき、 $z = \sin u$ として次のダイアグラムを考える。



合成関数の微分法より

$$z_x = \frac{dz}{du} u_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cos(x^2 + y^2)$$

となる。 y に関する微分も同様に計算できて

$$\begin{aligned} z_x &= 2x \cos(x^2 + y^2) & z_y &= 2y \cos(x^2 + y^2) \\ x_s &= 1 & y_s &= t \end{aligned}$$

となる。よって

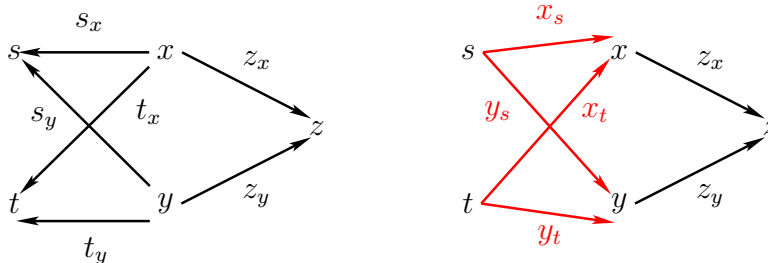
$$z_s = 2x \sin(x^2 + y^2) + 2yt \cos(x^2 + y^2)$$

- 偏微分の計算で 3 つ目に押さえておくべきなのは

多変数関数の逆関数の微分法

である。

- $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2 y^2$ を例に z_s, z_{ss} を求めてみよう。
変数間の関係は下図左であって、下図右ではない。



- 多変数関数の逆関数の微分法を使うためには逆行列の計算が必要になる。

- 「行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $\det A = ad - bc \neq 0$ のとき存在して

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。」ということを知っていれば使えばよい。

- うろ覚えのときは

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

を計算してみよ。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

となる。 $AB = E_2$ (E_2 は 2 次の単位行列) となるのが逆行列の定義なので前の事実が確認できる。

- まったく憶えていないときは $AB = E_2$ となる B が逆行列の定義であることを知っていれば, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおいて

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を x, y, z, w に関する連立 1 次方程式と見て解けば得られる。

- x_s, y_s を計算するため, $\frac{D(s, t)}{D(x, y)}$ を求めその逆行列を計算する。

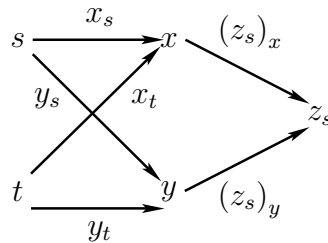
$$\begin{aligned} \frac{D(s, t)}{D(x, y)} &= \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} &= \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \\ &= \left(\frac{D(s, t)}{D(x, y)} \right)^{-1} = \frac{1}{4xy(x^2 - y^2)} \begin{pmatrix} 2x^2y & -2y \\ -2xy^2 & 2x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2xy(x^2 - y^2)} \begin{pmatrix} x^2y & -y \\ -xy^2 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- よって

$$x_s = \frac{x^2 y}{2xy(x^2 - y^2)} = \frac{x}{2(x^2 - y^2)}, \quad y_s = \frac{-xy^2}{2xy(x^2 - y^2)} = \frac{-y}{2(x^2 - y^2)}$$

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s = 1 \frac{x}{2(x^2 - y^2)} + 1 \frac{-y}{2(x^2 - y^2)} = \frac{1}{2(x + y)}$$

- $z_{ss} = (z_s)_s$ なので先ほどの図式で z を z_s に置き換えたものを考える。



$$z_{ss} = (z_s)_x x_s + (z_s)_y y_s$$

である。 x_s, y_s はすでに求めてある。 $z_s = \frac{1}{2(x + y)}$ なので

$$(z_s)_x = -\frac{1}{2(x + y)^2}$$

$$(z_s)_y = -\frac{1}{2(x + y)^2}$$

よって

$$\begin{aligned} z_{ss} &= -\frac{1}{2(x + y)^2} \frac{x}{2(x^2 - y^2)} - \frac{1}{2(x + y)^2} \frac{-y}{2(x^2 - y^2)} \\ &= -\frac{x - y}{4(x + y)^2(x - y)(x + y)} = -\frac{1}{4(x + y)^3} \end{aligned}$$