解析学 I に対する追加説明 $\sharp 6$

- 有理関数の積分に関して再度説明しておく。有理関数を積分するためには次のようなことが必要になる。

(1) (分子の次数) $<$ (分母の次数) への変形

(2) 部分分数分解

(3) 分数式の整形 ： $\dfrac{1}{(x+a)^n}, \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}, \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$ の和の形に

(4) 漸化式

- 最初から「(分子の次数) $<$ (分母の次数)」の形になっているときは何もする必要はないが,「(分子の次数) $\geq$ (分母の次数)」の場合は割り算を実行する。

例えば被積分関数が $Q_1(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$ のときはなにもする必要はない。$Q_2(x) = \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x+1}$ のときは割り算を実行する。

$$Q_2(x) \text{ の分子} = (x^2+x+2)(x+1)+4$$

となるので

$$\begin{aligned}
Q_2(x) &= \frac{(x^2+x+2)(x+1)+4}{x+1} \\
&= \frac{(x^2+x+2)(x+1)}{x+1} + \frac{4}{x+1} \\
&= x^2+x+2+\frac{4}{x+1}
\end{aligned}$$

となる。

- 次の例は 2008 年度の解析学試験の問題からとった。

$Q(x) = \dfrac{3x^3+11x^2+14x+7}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$ を部分分数展開せよ。

- $(x+1)^2$ と x^2+2x+2 は 2 次式なので，分子は高々1 次式である。よって A,B,C,D を用いて次式の様に書ける。

$$\frac{3x^3+11x^2+14x+7}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} \tag{1}$$

- (1) 式を恒等的に満たす定数 A,B,C,D を見つければよい。最初は係数比較法で求める。(1) 式の右辺を通分すると

$$\frac{(A+C)x^3+(2A+B+2C+D)x^2+(2A+2B+C+2D)x+(2B+D)}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$$

となる。この式の分母と (1) 式の分母が恒等的に等しいので対応する係数が等しい。3 次式の係数を比較して $A+C=3$ が得られる。2 次式以下も同様に比較すると $2A+B+2C+D=11, 2A+2B+C+2D=14, 2B+D=7$ が得られる。四元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} A & & + & C & & & =3 \\ 2A & + & B & + & 2C & + & D & =11 \\ 2A & + & 2B & + & C & + & 2D & =14 \\ & & 2B & & & + & D & =7 \end{cases}$$

を解けばよい。

- 連立方程式を解く方法として，ここでは線型代数で学んだ基本変形を用いる方法を使う。係数拡大行列をつくり基本変形していく。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $A=1, B=2, C=2, D=3$ なので

$$\frac{3x^3+11x^2+14x+7}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{x+2}{(x+1)^2} + \frac{2x+3}{x^2+2x+2}$$

  と部分分数分解される。

- 代入法で解いてみよう。$g(x) = 3x^3+11x^2+14x+7$ とおく。このとき恒等的に

$$g(x) = (Ax+B)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x+1)^2 \qquad (2)$$

  が成立している。

- 代入法は (2) 式に値を代入することで求める方法であるが，計算しやすい値を代入する方がよい。$(x+1)^2$ を 0 にする値と x^2+2x+2 を 0 にする値の 2 通りが考えられる。$(x+1)^2=0$ の方が簡単そうに見えるが，A, B を求めるためには式が 2 つ必要になる。微分を用いて工夫する必要が生じる。この方法は後で紹介するとして，先に $x^2+2x+2=0$ の解を用いる方法で解く。

- $x^2+2x+2=0$ の解は $\alpha = 1+i$ と $\beta = 1-i$ である。ここでは $\alpha = 1+i$ を用いる。$\alpha^2+2\alpha+2=0$ なので $(\alpha+1)^2 = \alpha^2+2\alpha+1 = -1$ である。

  (2) 式の右辺に α を代入すると

$$(A\alpha+B)(\alpha^2+2\alpha+2) + (C\alpha+D)(\alpha+1)^2 = -(C\alpha+D)$$

  となる。(2) 式の左辺に α を代入して計算していくが，$\alpha^2 = -2\alpha-2$ を用いて次数を下げていく。

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 3\alpha^3+11\alpha^2+14\alpha+7 = 3(\alpha^2)\alpha+11\alpha^2+14\alpha+7 \\ &= 3(-2\alpha-2)\alpha+11\alpha^2+14\alpha+7 = 5\alpha^2+8\alpha+7 \\ &= 5(-2\alpha-2)+8\alpha+7 = -2\alpha-3 \end{aligned}$$

  よって

$$-(C\alpha+D) = -(2\alpha+3)$$

  が成立する。

$$(2-C)\alpha = D-3$$

の右辺は実数なので，$2-C\neq 0$ であれば α が実数になり矛盾。よって $C=2$ であり，$D=3$ となる。

$C=2, D=3$ を (2) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
g(x)-(2x+3)(x+1)^2 &= 3x^3+11x^2+14x+7-(2x+3)(x+1)^2 \\
&= x^3+4x^2+6x+4 = (x+2)(x^2+2x+2)
\end{aligned}
$$

より $A=1, B=2$ となる。

- $x=-1$ を代入する代入法で解いてみよう。(2) 式に $x=-1$ を代入すると $g(-1)=3(-1)^3+11(-1)^2+14(-1)+7=1$ より

$$
\begin{aligned}
1=g(-1) &= (A(-1)+B)((-1)^2+2(-1)+2) \\
&= B-A
\end{aligned}
$$

  A, B を求めるためには A, B に関する式がもうひとつ必要である。そこで (2) 式を x で微分する。

$$
g'(x)=A(x^2+2x+2)+(Ax+B)(2x+2)+C(x+1)^2+2(Cx+D)(x+1)
$$

  これに $x=-1$ を代入すると $g'(-1)=A$ となる。

  $g'(x)=9x^2+22x+14$ なので $g'(-1)=1$ より $A=1, B=2$ を得る。

$$
\begin{aligned}
Cx+D &= \frac{g(x)-(x+2)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(2x+3)(x+1)^2}{(x+1)^2} = 2x+3
\end{aligned}
$$

  より $C=2, D=3$ となる。

- 部分分数分解ができたら次に積分できるように分数式の整形を行う。整形とは分数式を $\dfrac{1}{(x+a)^n}, \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}, \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$ の和の形に変形することである。

- $Q(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}+\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$ なので最初に $\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ を整形する。分母の因数である $x+1$ で分子を割っていけばよい。

$$
\begin{aligned}
Q_1(x) &= \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

- $Q_2(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$ なので分母の 1 次の項が 0 になるように変数変換を行う。

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$$

なので $x+1=t$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{x^2+2x+2} &= \frac{2x+3}{(x+1)^2+1} = \frac{2(t-1)+3}{t^2+1} \\ &= \frac{2t+1}{t^2+1} = \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\end{aligned}$$

- この問題では分母に $(x^2+a^2)^n$ $(n \geq 2)$ はないので漸化式は必要ない。よってあとは積分を実行すればよい。

$$J = \int Q(x)\,dx = \int Q_1(x)\,dx + \int Q_2(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int Q_1(x)\,dx &= \int \left\{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right\} dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \log|x+1| - \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int Q_2(x)\,dx &= \int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \left\{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\right\} dt \\ &= \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+1}\,dt \quad (t = x+1)\end{aligned}$$

となる。$\dfrac{2t}{t^2+1}$ の積分は $u = t^2+1$ と変数変換をする。$\dfrac{du}{dt} = 2t$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt &= \int \frac{2t}{u}\frac{dt}{du}\,du = \int \frac{2t}{u}\frac{1}{2t}\,du = \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \log|u| = \log|t^2+1| = \log(t^2+1) \\ &= \log(x^2+2x+2)\end{aligned}$$

後者は $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$ より

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t = \arctan(x+1)$$

- 以上により

$$J = \log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)$$

- この問題では漸化式を用いる必要がなかったので，漸化式が必要な問題を紹介しておく。次は 2014 年度の問題から。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問に答えよ。

(1) $y = \dfrac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$ を部分分数展開せよ。

(2) $J_2 = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+2)^2}\,dt$，$J_1 = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+2)}\,dt$ とする。$\dfrac{1}{t^2+2} = \dfrac{t^2+2}{(t^2+2)^2} = \dfrac{t^2}{(t^2+2)^2} + \dfrac{2}{(t^2+2)^2}$ の両辺を積分することにより $J_2 = \dfrac{t}{4(t^2+2)} + \dfrac{1}{4}J_1$ を導け。

(3) $I = \displaystyle\int \frac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx$ を求めよ。$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t$ を使用してもよい。

- 分子の次数の方が分母の次数より小さいので

$$Q(x) = \frac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$$

を部分分数分解する。

$f(x) = (x^2+2x+3)^2(x+1), g(x) = 2x^4+8x^3+20x^2+25x+19$ とおくと，定数 A と 3 次以下の関数 $g_1(x)$ を用いて

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_1(x)}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{A}{x+1}$$

と部分分数分解できる。これを通分することにより

$$g(x) = g_1(x)(x+1) + A(x^2+2x+3)^2 \tag{3}$$

が恒等的に成り立つ。(3) に $x=-1$ を代入すると

$$8 = g(-1) = g_1(-1)(-1+1) + A\left((-1)^2+2(-1)+3\right)^2 = 4A$$

より $A=2$ を得る。

$$\begin{aligned}\frac{g_1(x)}{(x^2+2x+3)^2} &= \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{2}{x+1}\\ &= \frac{2x^4+8x^3+20x^2+25x+19-2(x^2+2x+3)^2}{f(x)}\\ &= \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\end{aligned}$$

より

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{2}{x+1}$$

- $\dfrac{1}{t^2+2} = \dfrac{t^2+2}{(t^2+2)^2} = \dfrac{t^2}{(t^2+2)^2} + \dfrac{2}{(t^2+2)^2}$ の両辺を積分すると

  $$J_1 = \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt + 2J_2 \quad \text{であり，また}$$

  $$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt &= \int t\left(-\frac{1}{2(t^2+2)}\right)'\,dt \\ &= -\frac{t}{2(t^2+2)} - \int \left(-\frac{1}{2(t^2+2)}\right)dt = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2}J_1\end{aligned}$$

  より $J_1 = -\dfrac{t}{2(t^2+2)} + \dfrac{1}{2}J_1 + 2J_2$ となる。これを変形して

  $$J_2 = \frac{t}{4(t^2+2)} + \frac{1}{4}J_1$$

- $t = x+1$ とおき，(2) の漸化式を用いると

  $$\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{(t^2+2)^2}\,dt = \frac{t}{4(t^2+2)} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+2}\,dt$$

  となる。$t = \sqrt{2}u$ とおくと $\dfrac{dt}{du} = \sqrt{2}$ より

  $$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+2}\,dt &= \int \frac{1}{2u^2+2}\sqrt{2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan u = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

  となる。

- 以上により

  $$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx \\ &= \frac{t}{4(t^2+2)} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+2}\,dt + \int \frac{2}{x+1}\,dx \\ &= \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + 2\log|x+1|\end{aligned}$$