解析学 I に対する追加説明#7

- 演算子法についての追加説明である。
- 演算子で微分方程式を解くことはスローガン的には

  微分方程式を解く $\xrightarrow{D-\lambda=e^{\lambda x}De^{-\lambda x}}$ 積分

  といえる。

  また演算子を因数分解することは

  2 階の微分方程式を解く $\longrightarrow$ 1 階の微分方程式を 2 つ解く

  といえる。

- 前回とりあげた例

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$$

で見てみよう。微分演算子 D を用いて

$$(D^2 - 4)y = 0$$

とかく。これを

$$(D-2)(D+2)y = 0 \tag{1}$$

と演算子の積の形にする。$(D+2)y = u$ とおくと微分方程式 (1) は $(D-2)u = 0$ となる。すなわち 2 階の微分方程式 (1) は 1 階の 2 つの微分方程式

$$(D-2)u = 0 \tag{2}$$

$$(D+2)y = u \tag{3}$$

を解くことに帰着できる。

- 微分方程式 (2) は $D-\lambda=e^{\lambda x}De^{-\lambda x}$ を用いると

  $$e^{2x}De^{-2x}u=0$$

  即ち $v=e^{-2x}u$ とおくと

  $$Dv=0$$

  となり，v の積分を求める問題になる。

- $v=C_1$ なので $u=C_1e^{2x}$ となり微分方程式 (3) は

  $$(D+2)y=C_1e^{2x}$$

  となる。$D-\lambda=e^{\lambda x}De^{-\lambda x}$ を用いると $e^{-2x}De^{2x}y=C_1e^{2x}$ と変形できる。$z=e^{2x}y$ とおくと，この微分方程式は

  $$Dz=C_1e^{4x}$$

  となり，z の積分を求める問題になる。