解析学 I 要綱 ♯5

1.7 曲線の概形

関数が与えられたときその概形を描くことは，基本的で重要なことである。すでに数学序論で学んでいるが，再度簡単に触れる。

関数 $y = f(x)$ の概形を描くためには次の様なことを調べることが必要である。

(1) $f'(x)$ を求め，$f'(x) = 0$ となる x を求める。それを $x_1, x_2, \ldots, x_k$ とすると，x_i と x_{i+1} の間と x_1 より小さい部分および x_k より大きな部分で $f'(x)$ が正になるか負になるかを調べる。

(2) 凹凸を調べるときは，$f''(x)$ を求め $f''(x) = 0$ となる x を求める。それを $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\ell$ とすると，x'_i と x'_{i+1} の間と x'_1 より小さい部分および x'_ℓ より大きな部分で $f''(x)$ が正になるか負になるかを調べる。

(3) 臨界点 ($f'(x) = 0$ となる点)，x 軸および y 軸との交点など特徴的な点の座標を求める。凹凸を調べているときは変曲点も求める。

(4) その他関数に特有な必要なことがあれば調べる。

例 1.29 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ のグラフの概形を描く。

$$f'(x) = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

であるから，臨界点は $x = \pm 1$ である。$f'(-2) = -\dfrac{3}{25} < 0$，$f'(0) = 1 > 0$，$f'(2) = -\dfrac{3}{25} < 0$ となっている。

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

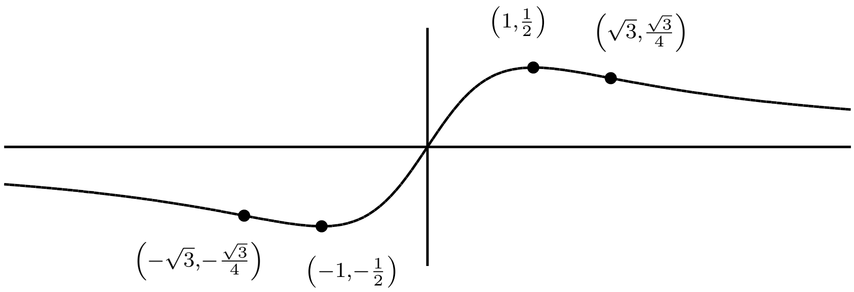
であるから，$f''(x) = 0$ となる x は $x = 0, \pm\sqrt{3}$ である。$f''(2) = \dfrac{4}{125} > 0$，$f''(1) = -\dfrac{1}{2}$，$f''(-1) = \dfrac{1}{2}$，$f''(-2) = -\dfrac{4}{125} < 0$ とな

っている。$f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$f(-1) = -\dfrac{1}{2}$，$f(0) = 0$，$f(1) = \dfrac{1}{2}$，$f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ より，増減表を作ると，

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	0	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	↘

となり，$x = -1$ は極小点，$x = 1$ は極大点，$x = \pm\sqrt{3}$ は変曲点であることがわかる。x 軸との交点の x 座標は $f(x) = 0$ を解いて $x = 0$ であり，y 軸との交点の y 座標は $f(0) = 0$ である。

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ に注意すると，グラフの概形は次のようになることがわかる。



パラメータ表示された曲線の概形

$(x(t), y(t))$ とパラメータ表示された曲線の概形を描くためには次の様なことを調べることが必要である。

(1) $x'(t)$ を求め，$x'(t) = 0$ となる t を求める。それを $t_1, t_2, \ldots, t_k$ とすると，t_i と t_{i+1} の間と t_1 より小さい部分および t_k より大きな部分で $x'(t)$ が正になるか負になるかを調べる。

(2) $y'(t)$ を求め，$y'(t) = 0$ となる t を求める。それを $t'_1, t'_2, \ldots, t'_\ell$ とすると，t'_i と t'_{i+1} の間と t'_1 より小さい部分および t'_ℓ より大きな部分で $y'(t)$ が正になるか負になるかを調べる。

(3) 各区間 ($t_i < t < t'_j$ 等) で t が増加した場合点 $(x(t), y(t))$ がどの方向に移動するかを調べる。

(4) 曲線と x 軸，及び y 軸との交点 ($x(t)=0$ または $y(t)=0$ となる点) の座標を求める。また曲線が方向を変える点 ($x'(t)=0$ または $y'(t)=0$ となる点が候補) の座標を求める。

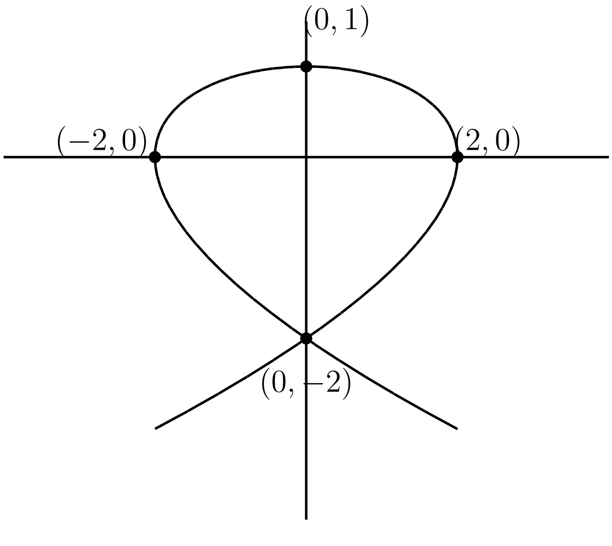
(5) その他必要なことがあれば調べる。

$x=x(t)=3t-t^3, y=y(t)=1-t^2$ でパラメータ表示された曲線の概形を書こう。

$x'(t)=3-3t^2$ より $t=\pm1$ において $x'(t)=0$ となる。また $x'(-2)=-9<0$，$x'(0)=3>0$，$x'(2)=-9<0$ となっている。$y'(t)=-2t$ より $t=0$ において $y'(t)=0$ となる。また $y'(-1)=2>0$，$y'(1)=-2<0$ となっている。よって増減表は以下の様になる。

t		-1		0		1	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x=0$ となるのは $t=0,\pm\sqrt{3}$, $y=0$ となるのは $t=\pm1$ である。即ちこの曲線は x 軸と $(2,0),(-2,0)$ で交わり，y 軸とは $(0,1),(0,-2)$ で交わる。また方向を変えるのは $t=\pm1,0$ のときであり，点は $(x(-1),y(-1))=(-2,0)$，$(x(0),y(0))=(0,1)$，$(x(1),y(1))=(2,0)$ である。このことに注意して概形を描くと次の様になる。



次の問題は数学序論の演習問題である。**注意：**グラフの概形が描けると自分で思う人は 1〜2 題確認の意味で描くこと。そうでない人はすべてやること。

演習問題 1.29　次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$　　(2) $f(x) = xe^{-x}$

(3) $f(x) = x^2 \log x$　　(4) $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$

(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$　　(6) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(7) $f(x) = x + 2\cos x$　　(8) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

(9) $f(x) = x^{-x^2}$　　(10) $y = (x-5)^4(x+1)^3$

(11) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$　　(12) $y = e^{-x^2}$

(13) $y = x\log x$

次の演習問題も数学序論の問題である。前の演習問題の前の注意に留意して解くこと。

演習問題 1.30　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

(3) $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = 2t^4 - t$

(4) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2 - t^4$