解析学 I 要綱 $\sharp 8$

2.6　高階偏導関数とテーラーの定理

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり，この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。

定理 2.23 [シュワルツの定理] 点 (a,b) の近傍で，f_x, f_y, f_{xy} が存在して，f_{xy} が (a,b) で連続ならば，f_{yx} も存在して $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ が成立する。

演習問題 *2.25　定理 2.23 を証明せよ。

定義 2.24 関数 $f(x,y)$ に対し f_x および f_y が存在して共に連続であるとき関数 $f(x,y)$ は $\boldsymbol{C^1}$ **級**であるという。定理 2.11 より C^1 級であれば全微分可能である。

f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} および f_{yy} が存在してすべての 2 階の偏導関数が連続のとき関数 $f(x,y)$ は $\boldsymbol{C^2}$ **級**であるという。f が C^2 級のとき定理 2.23 より $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する。

関数 $f(x,y)$ が n 階までの導関数がすべて存在して連続であれば $\boldsymbol{C^n}$ **級**であるという。関数 $f(x,y)$ が C^n 級であれば，n 階までの導関数は x,y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る ($\to$ 演習問題 2.26)。

演習問題 2.26　定理 2.23 を仮定して次を示せ。

(1) $z = f(x,y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}, \quad z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy}$$

が成立する。

(2) * $z = f(x,y)$ が C^n 級であるとする。α を x または y が k 個 $(0 \le k \le n-2)$ 並んだもの，β を x または y が $n-k-2$ 個並んだものとすると

$$z_{\alpha xy\beta} = z_{\alpha yx\beta}$$

が成立する。例えば $\alpha = xy, \beta = yy$ のときは $z_{xyxyyy} = z_{xyyxyy}$ を意味する。

(3) * $z = f(x,y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x,y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

以下この節では関数は**何回でも微分できる**ことを仮定し，それを特に断らないことにする。

多変数のテーラーの定理を述べるために次の記号を導入する。この記号を使用しないと，定理を書き下すだけで結構な手間である。

定義 2.25 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を独立したものとして扱い $\dfrac{\partial}{\partial x}f$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ が f に作用していると見なす。このとき形式的に $D = h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}$ と定義し，Df を $Df = h\dfrac{\partial}{\partial x}f+k\dfrac{\partial}{\partial y}f$ と定義する。また $D^2 = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ なので

$$D^2 f = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f$$

と考える。一般に $D^n = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r}k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$ なので

$$D^n f = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r}k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\partial y^r}f$$

と考える。

定理 2.26 [**テーラーの定理**] (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分は定義域に含まれているとする。

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) =& \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}D^j f(a,b) + \frac{1}{n!}D^n f(a+\theta h, b+\theta k) \\ =& f(a,b) + Df(a,b) + \cdots + \frac{1}{j!}D^j f(a,b) + \cdots \\ & + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(a,b) + \frac{1}{n!}D^n f(a+\theta h, b+\theta k) \end{aligned}$$

となる θ $(0<\theta<1)$ が存在する。

1 変数の定理の場合と同様に，定理の $\dfrac{1}{n!}D^n f(a+\theta h, b+\theta k)$ の項を剰余項といい R_n で表す。

演習問題 2.27 $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ とおき，$F(t)$ に 1 変数のテーラーの定理を適用することにより定理 2.26 を証明せよ。

定理 2.26 は D という記号を用いて記述しているので，1 変数の定理と同じ様に見えるが，書き下してみると 1 変数よりも複雑である。$n=3$ のときに定理を D という記号を用いずに書く。

$$D^0f=f \qquad Df=hf_x+kf_y$$
$$D^2f=h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy} \qquad D^3f=h^3f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy}$$

なので

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=&f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)\\&+h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b)\\&+h^3f_{xxx}(a+\theta h,b+\theta k)+3h^2kf_{xxy}(a+\theta h,b+\theta k)\\&+3hk^2f_{xyy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^3f_{yyy}(a+\theta h,b+\theta k)\end{aligned}$$

となる。

演習問題 2.28　$n=4$ のとき定理 2.26 を D を用いないで記述せよ。また $n=5$ のときも記述せよ。

ここでは剰余項を無視した近似を考える。

関数は $z=f(x,y)=x^2e^y$ で点は $(a,b)=(1,1)$ とする。最初に $n=2$ の場合を考える。$f_x=2xe^y$, $f_y=x^2e^y$ なので $f(1,1)=e$, $f_x(1,1)=2e$, $f_y(1,1)=e$ である。よって

$$f(1+h,1+k)\fallingdotseq e+2eh+ek$$

である。これは関数 f を $(x,y)=(1,1)$ で h,k に関する 1 次式で近似している式である (今の場合は接平面の方程式)。1 変数のときと同じように **「近似する 1 次式」** を定義する。$x=a+h, y=b+k$ とする。

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-(A+Bh+Ck)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく。$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立するとき，$A+Bh+Ck$ は $(x,y)=(a,b)$ で $f(x,y)=f(a+h,b+k)$ を**近似する 1 次式**と呼ぶ。この例でいうと $e+2eh+ek$ は $(x,y)=(1,1)$ で $f(x,y)=x^2e^y$ を近似する 1 次式である (証明は演習問題 2.30)。

$n=3$ の場合は

$$f(1+h,1+k)\fallingdotseq e+2eh+ek+eh^2+2ehk+\frac{1}{2}ek^2$$

この式は 2 次式による近似になっている。

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-(A+Bh+Ck+Dh^2+Ehk+Fk^2)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2}$$

とおく。$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立するとき，$A+Bh+Ck+Dh^2+Ehk+Fk^2$ は $(x,y)=(a,b)$ で $f(x,y)=f(a+h,b+k)$ を**近似する 2 次式**と呼ぶ。この例でいうと $e+2eh+ek+eh^2+2ehk+\dfrac{1}{2}ek^2$ は $(x,y)=(1,1)$ で $f(x,y)=x^2e^y$ を近似する 2 次式である (証明は演習問題 2.30)。

n を大きくしていくと高い次数の式による近似になり，一般に近似が良くなるのは 1 変数の場合と同様である。$g(h,k)$ を h,k に関する n 次式とする。

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-g(h,k)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}$$

とおく。$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立するとき，$g(h,k)$ は $(x,y)=(a,b)$ で $f(x,y)$ を**近似する n 次式**と呼ぶ。この定義とテーラーの定理との関連については演習問題 2.30 参照のこと。

1 変数の場合と同様に 2 変数でも級数展開が考えられるがこの講義では取扱わない。極値問題への応用は次節で扱う。

演習問題 2.29　次の関数を $(x,y)=(a,b)$ で近似する 1 次式，2 次式および 3 次式を求めよ。ただし演習問題 2.30 の結果は用いてもよい。

(1) $z=f(x,y)=(x-1)(y+2)\quad(a,b)=(0,0)$

(2) $z=f(x,y)=\dfrac{1}{1-2x+3y}\quad(a,b)=(0,0)$

(3) $z=f(x,y)=\sin(x+y)\quad(a,b)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

演習問題 *2.30

(1) $f(a,b)+Df(a,b)$ が $(x,y)=(a,b)$ で $f(x,y)$ を近似する 1 次式であることを示せ。

(2) $f(a,b)+Df(a,b)+\dfrac{1}{2!}D^2f(a,b)$ が $(x,y)=(a,b)$ で $f(x,y)$ を近似する 2 次式であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}D^jf(a,b)$ が $(x,y)=(a,b)$ で $f(x,y)$ を近似する n 次式であることを示せ。