解析学 I 問題解説 $\sharp 3$

河野

演習問題 ****1.7** 　定理 1.9，1.10，1.11 を証明せよ。

最初に最大値定理 (定理 1.9) を証明する。そのために「閉区間で定義された連続関数は上に有界である。」ことを証明する。

区間 I で定義された関数 f が上に有界であるとは「$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in I \quad f(x) \leq M$」を満たすことである。関数 f は閉区間 $I = [\,a,\,b\,]$ で連続とする。結論を否定し，f は I で有界ではないとする。このとき

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in I \qquad f(x) > M$$

が成立する。特に M として自然数 n をとると，n に対しある実数 $x_n \in I$ が存在して $f(x_n) > n$ が成立する。

ここで「数列 $\{\,x_n\,\}$ の部分列 $\left\{\,x_{\alpha(n)}\,\right\}$ で収束するものが存在する」ことを示す。ここで α は自然数 $\mathbb{N}$ から自然数 $\mathbb{N}$ への写像で単調増加であるものである。例えば $\alpha(n) = 2n$ の場合 $\left\{\,x_{\alpha(n)}\,\right\}$ は偶数番目のみから作られる部分列となる。

$\alpha(1) = 1$ と定義する。$a_1 = a, b_1 = b$ とし，$c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ と置く。2 つの区間 $I_1 = [\,a_1,\,c_1\,]$ と $J_1 = [\,c_1,\,b_1\,]$ のどちらかは $x_n\ (n \geq 1)$ を無限個含んでいる。I_1 が無限個含んでいるときは $a_2 = a_1, b_2 = c_1$ と置く。J_1 が無限個含んでいるときは $a_2 = c_1, b_2 = b_1$ と置く。$[\,a_2,\,b_2\,]$ に含まれる x_n で $n > \alpha(1)$ となるものを 1 つ選びその番号を $\alpha(2)$ とする。

$c_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ と置く。2 つの区間 $I_2 = [\,a_2,\,c_2\,]$ と $J_2 = [\,c_2,\,b_2\,]$ のどちらかは $x_n\ (n \geq \alpha(2))$ を無限個含んでいる。I_2 が無限個含んでいるときは $a_3 = a_2, b_3 = c_2$ と置く。J_2 が無限個含んでいるときは $a_3 = c_2, b_3 = b_2$ と置く。$[\,a_3,\,b_3\,]$ に含まれる x_n で $n > \alpha(2)$ となるものを 1 つ選びその番号を $\alpha(3)$ とする。

k 番目まで $a_k, b_k, \alpha(k)$ が選ばれているとする。$c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ と置く。2 つの区間 $I_k = [\,a_k,\,c_k\,]$ と $J_k = [\,c_k,\,b_k\,]$ のどちらかは $x_n\ (n \geq \alpha(k))$ を無限個含んでいる。I_k が無限個含んでいるときは $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k$ と置く。J_k が無限個含んでいるときは $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$ と置く。$[\,a_{k+1},\,b_{k+1}\,]$ に含まれる x_n で $n > \alpha(k)$ となるものを 1 つ選びその番号を $\alpha(k+1)$ とする。

このことを繰り返すと数列 $\{\,a_n\,\}, \{\,b_n\,\}$ 及び部分列 $\left\{\,x_{\alpha(n)}\,\right\}$ が定まる。作り方から a_n は上に有界な単調増加数列であり，b_n は下に有界な単調減少数列であり，任意の自然数 n に対し

$$a_n \leq x_{\alpha(n)} \leq b_n$$

が成立する。定理 1.3 (上に有界な単調増加数列は収束する) および演習問題 1.5 より a_n および b_n は収束する。$b_n - a_n = (b-a)\dfrac{1}{2^{n-1}}$ より a_n と b_n は同じ値 A に収束する。はさみうちの定理 (定理 1.2 (3)) より $x_{\alpha(n)}$ の同じ値 A に収束する。即ち

$$\lim_{n\to\infty} x_{\alpha(n)} = A$$

$a \leq a_n \leq x_{\alpha(n)} \leq b_n \leq b$ より $a \leq A \leq b$，即ち $A \in I$ である。f は連続なので

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\alpha(n)}) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{\alpha(n)}\right) = f(A)$$

となるが，一方

$$f(x_{\alpha(n)}) > \alpha(n) \geq n$$

なので $\lim_{n\to\infty} f(x_{\alpha(n)}) = \infty$ となる。これは矛盾，よって f は有界である。

定理 1.9 の証明に入ろう。定理が成立しないとする。即ち関数 f に最大値が存在しないと仮定する。$X = \{\, f(x) \mid x \in I \,\}$ は上に有界なので X の最小上界 (上限) $\sup X$ が存在する。これを M とする。$f(x) = M$ となる $x \in I$ が存在すればそれは最大値である。よって $f(x) = M$ となる x は I に存在しない。

もし「$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ \ f(x) \leq M - \dfrac{1}{n}$」が成立すると $M - \dfrac{1}{n}$ が上界になり，M が最小上界ということに反する。よってこの否定，即ち

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in I\ \ f(x) > M - \frac{1}{n}$$

が成立する。この性質をもつ x を x_n とすると，$f(x_n) > M - \dfrac{1}{n}$，即ち

$$\frac{1}{M - f(x_n)} > n$$

が成立する。

$g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ とおくと，分母が 0 にならないので $g(x)$ は連続関数である。すでに示したことから $g(x)$ は有界である。しかし任意の自然数 n に対し

$$g(x_n) = \frac{1}{M - f(x_n)} > n$$

となる x_n が存在するので有界ではない。これは矛盾なので最大値が存在する。

次に定理 1.10 を証明する。$I = [\, a, b \,]$，$X = \{\, x \in I \mid f(x) \leq \alpha \,\}$ と定義する。X は上に有界なので最小上界 $\sup X$ が存在する。これを c とする。

(1) $f(c) \leq \alpha$ が成立する。これを背理法で示す。結論が成立しないとすると，$f(c) > \alpha$ である。$\varepsilon = f(c) - \alpha$ とすると $\varepsilon > 0$ よりある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

が成立する。このとき $-\varepsilon < f(x) - f(c)$ なので，$-(f(c) - \alpha) < f(x) - f(c)$ より $\alpha < f(x)$ が成立する。$\sup X$ より小さい実数は X の上界ではないので $c - \delta$ は X の上界ではない。即ち

$$\exists t \in X\ \ c - \delta < t \leq c$$

が成立する。$t \in X$ より $f(t) \leq \alpha$ である。一方 $|t - c| < \delta$ なので $\alpha < f(t)$ が成立する。これは矛盾，よって (1) が成立する。

(2) $f(c) \geq \alpha$ が成立する。これを背理法で示す。結論が成立しないとすると，$f(c) < \alpha$ である。$\varepsilon = \alpha - f(c)$ とおくと $\varepsilon > 0$ よりある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

が成立する。このとき $f(x) - f(c) < \varepsilon$ なので，$f(x) - f(c) < \alpha - f(c)$ より $f(x) < \alpha$ が成立する。$t = c + \dfrac{\delta}{2}$ とするとき，$|t - c| < \delta$ なので $f(t) < \alpha$ が成立する。よって $t \in X$ となる。これは c が X の上界ということに反する。よって (2) が成立する。以上により $f(c) = \alpha$ が示される。

最後に定理 1.11 を証明する。最初に単調増加関数に関して証明する。

$R=(-\infty,\infty)$ と考えると定義域は $a=-\infty$, $b=\infty$ の場合も含めて $I=[a,b),(a,b],(a,b),[a,b]$ のいずれかの形をしている。

b が実数で $b\in I$ のとき $d=f(b)$ とおき，b が実数で $b\notin I$ のとき $d=\lim_{x\to b-0}f(x)$ とおき，$b=\infty$ のとき $d=\lim_{x\to\infty}f(x)$ とおく。a が実数で $a\in I$ のとき $c=f(a)$ とおき，a が実数で $a\notin I$ のとき $c=\lim_{x\to a+0}f(x)$ とおき，$a=-\infty$ のとき $c=\lim_{x\to-\infty}f(x)$ とおく。

f を区間 I で定義された単調増加で連続な関数とする。$I=[a,b),(a,b],(a,b),[a,b]$ のそれぞれの場合 $J=[c,d),(c,d],(c,d),[c,d]$ とおく。このとき $f:I\longrightarrow J$ が全単射であることを示す。単調増加関数が単射であることはすでに示しているので，全射であることを示す。

α を J の任意の元とする。$\alpha=c$ のときは $a\in I$ に対し $f(a)=c=\alpha$ となる。$\alpha=d$ のときは $b\in I$ に対し $f(b)=d=\alpha$ となるので成立している。よって $\alpha\neq c$ かつ $\alpha\neq d$ とすると $c<\alpha<d$ である。中間値の定理より $e\in I$ が存在して $f(e)=\alpha$ となる。よって f は全射である。

よって逆関数 $f^{-1}:J\longrightarrow I$ が存在する。f^{-1} も単調増加であることを示す。$y_1,y_2\in J$ が $y_1<y_2$ を満たすとする。$x_1=f^{-1}(y_1),x_2=f^{-1}(y_2)$ とおくと $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$ となる。x_1 と x_2 は (1) $x_1>x_2$，または (2) $x_1=x_2$，または (3) $x_1<x_2$ のいずれかが成立している。(1) のとき $x_1>x_2$ と f が単調増加であることから

$$y_1=f(x_1)>f(x_2)=y_2$$

となる。これは矛盾。(2) のとき

$$y_1=f(x_1)=f(x_2)=y_2$$

となり，これも矛盾。よって (3) が起こっている。よって

$$f^{-1}(y_1)=x_1<x_2=f^{-1}(y_2)$$

となるので f^{-1} は単調増加である。

f^{-1} が連続であることを示す。$\alpha\in J$ とする。$\alpha\neq c$ かつ $\alpha\neq d$ の場合を考える。$f^{-1}(\alpha)=e$ とおくと $f(e)=\alpha$ である。ε を任意の正の実数とする。$x_1=\max\{e-\varepsilon,a\}$，$x_2=\min\{e+\varepsilon,b\}$ とおくと，$x_1<e<x_2$ が成立している。このとき $f(x_1)<f(e)<f(x_2)$ が成立する。$y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$ とおくと $y_1<\alpha<y_2$ が成立する。$\delta=\min\{y_2-\alpha,\alpha-y_1\}$ とおく。$|y-\alpha|<\delta$ となる任意の $y\in J$ に対し

$$y_1-\alpha=-(\alpha-y_1)\leq-\delta<y-\alpha<\delta\leq y_2-\alpha$$

が成立するので $y_1<y<y_2$ が成立する。よって

$$x_1=f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_2)=x_2$$

が成立する。

$$-\varepsilon\leq x_1-e<f^{-1}(y)-f^{-1}(\alpha)<x_2-e\leq\varepsilon$$

より $|f^{-1}(y)-f^{-1}(\alpha)|<\varepsilon$ となるので α において連続である。

$\alpha=c$ のとき $\alpha\in J$ より $\alpha=f(a)$ $(a\in I)$ となっている。ε を任意の正の実数とする。$x_2=\min\{a+\varepsilon,b\}$ と置くと $a<x_2$ が成立している。このとき $f(a)<f(x_2)$ が成立する。$y_2=f(x_2)$ と置くと $\alpha<y_2$ が成立する。$\delta=y_2-\alpha$ とおくと $0\leq y-\alpha<\delta$ となる任意の $y\in J$ に対し

$$f^{-1}(\alpha)\leq f^{-1}(y)<f^{-1}(\delta+\alpha)=x_2$$

が成立する。よって

$$0 \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha) < x_2 - a \leq \varepsilon$$

が成立する。よって f^{-1} は $f(a)$ で連続である。

$\alpha = d$ のとき $\alpha \in J$ より $\alpha = f(b)$ $(b \in I)$ となっている。ε を任意の正の実数とする。$x_1 = \max\{b-\varepsilon, a\}$ と置くと $x_1 < b$ が成立している。このとき $f(x_1) < f(b)$ が成立する。$y_1 = f(x_1)$ と置くと $y_1 < \alpha$ が成立する。$\delta = \alpha - y_1$ とおくと $-\delta \leq y - \alpha \leq 0$ となる任意の $y \in J$ に対し

$$x_1 = f^{-1}(\alpha - \delta) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(\alpha)$$

が成立する。よって

$$-\varepsilon \leq x_1 - b \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha) \leq 0$$

が成立する。よって f^{-1} は $f(b)$ で連続である。

次に $f(x)$ が単調減少である場合を考える。$g(x) = -f(x)$ とおくと $g(x)$ は単調増加関数である。このとき g の定義域を I，終域を J とすると

$$g : I \longrightarrow J$$

は全単射である。このとき $K = \{-y \mid y \in J\}$ とおくと f は I から K への写像である。f は単調減少関数なので単射である。

y を K の任意の元とすると，$-y$ は J の元である。g は全射なので，ある $x \in I$ が存在して

$$-y = g(x) = -f(x)$$

が成立する。よって $y = f(x)$ となるので f は全射である。

よって f^{-1} が存在するが $f(x) = -g(x)$ より $f^{-1}(y) = g^{-1}(-y)$ となる。すでに示したことから g^{-1} は連続関数である。

γ が K の内部の点のとき

$$\lim_{y \to \gamma} f^{-1}(y) = \lim_{y \to \gamma} g^{-1}(-y) = g^{-1}\left(\lim_{y \to \gamma} -y\right) = g^{-1}(-\gamma) = f^{-1}(\gamma)$$

となるので f^{-1} は γ で連続である。区間の端では片側極限になるが同様に連続性をしめすことができる。

演習問題 1.8　定理 1.9 の成立を前提として次を証明せよ。

閉区間で定義された連続関数は最小値をとる。

$f(x)$ を閉区間で定義された連続関数とする。$g(x) = -f(x)$ とおくと $g(x)$ も閉区間で定義された連続関数である。よって定理 1.9 より $g(x)$ は最大値をとる。即ちある c が閉区間に存在して区間内の任意の点 x に対し $g(x) \leq g(c)$ が成立する。このとき $-f(x) = g(x) \leq g(c) = -f(c)$ より $f(x) \geq f(c)$ が成立するので $f(c)$ は最小値である。

演習問題 1.9　定理 1.10 の成立を前提として次を証明せよ。

閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) > f(b)$ を満たしているとする。$f(a) > \alpha > f(b)$ となる任意の α に対しある c $(a < c < b)$ が存在して $f(c) = \alpha$ となる。

$g(x) = -f(x)$ とおくと，$g(x)$ は $[\,a, b\,]$ で定義された連続関数であり $g(a) < g(b)$ となっている。α を $f(a) > \alpha > f(b)$ を満たす任意の実数とする。$\beta = -\alpha$ とし，この $g(x)$，β に定理 1.10 を適用すると，$a < c < b$ を満たす c で $g(c) = \beta$ となるものが存在する。

$$g(a) < g(c) = \beta < g(b)$$

より

$$-f(a) < -f(c) = -\alpha < -f(b)$$

であるが，3 辺に -1 をかけると

$$f(a) > f(c) = \alpha > f(b)$$

が得られる。

演習問題 1.10　微分可能な関数は連続であることを示せ。また連続であるが微分可能でない関数の例をあげよ。

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能のとき $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$ と置くと $\displaystyle\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ となる。よって

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} (f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h) = f(a)$$

となるので f は $x = a$ で連続である。

$y = f(x) = |x|$ (絶対値) とする。$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ なので f は $x = 0$ で連続である。

しかし

$$f'_+(0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{h}{h} = 1$$

であり，

$$f'_-(0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-h}{h} = -1$$

なので $x = 0$ で微分可能ではない。

演習問題 1.11　$f(x)$ を多項式とするとき次を示せ。$h = x - a$ とおき $f(x)$ を h に関する多項式に変形するとき

$$f(x) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \cdots + a_n h^n$$

となっているとする。

(1)　$y = f(x)$ を $x = a$ で近似する 1 次式は $g_1(h) = a_0 + a_1 h$ である。

(2)　$y = f(x)$ を $x = a$ で近似する 2 次式は $g_2(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2$ である。

(1)　$d(h) = f(x) - g_1(h)$ とおき，$\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h}$ とおく。

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \to 0} \frac{a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n}{h} = \lim_{h \to 0} \left(a_2 h + \cdots + a_n h^{n-1} \right) = 0$$

より $g_1(h)$ は $x=a$ で $y=f(x)$ を近似する 1 次式である。

(2)　$d(h)=f(x)-g_2(h)$ とおき，$\varepsilon(h)=\dfrac{d(h)}{h^2}$ とおく。

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=\lim_{h\to 0}\frac{a_3h^3+\cdots+a_nh^n}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left(a_3h+\cdots+a_nh^{n-2}\right)=0$$

より $g_2(h)$ は $x=a$ で $y=f(x)$ を近似する 2 次式である。

演習問題 1.12　$y=f(x)=f(a+h)$ を $x=a$ で近似する h の 3 次式を求めよ。ここで近似する 3 次式 $g(h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3$ とは $d(h)=f(a+h)-g(h)$ に対し $\varepsilon(h)=\dfrac{d(h)}{h^3}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するものをいう。関数は何回でも微分できることを仮定する。

3 次式 $g(h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3$ に対し

$$\begin{aligned}d(h)&=f(a+h)-g(h)\\ \varepsilon(h)&=\frac{d(h)}{h^3}\end{aligned}$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立している。$d(h)=\varepsilon(h)h^3$ なので $\displaystyle\lim_{h\to 0}d(h)=0$ となる。よって

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}d(h)\\ &=\lim_{h\to 0}\Big(f(a+h)-(A+Bh+Ch^2+Dh^3)\Big)\\ &=\lim_{h\to 0}f(a+h)-\lim_{h\to 0}(A+Bh+Ch^2+Dh^3)=f(a)-A\end{aligned}$$

となるので $A=f(a)$ である。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h^2=0$ なので

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\left(f(a)+Bh+Ch^2+Dh^3\right)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\left(B+Ch+Dh^2\right)\\ &=f'(a)-B\end{aligned}$$

となるので $B=f'(a)$ である。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h=0$ なので

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\bigl(f(a)+f'(a)h+Ch^2+Dh^3\bigr)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-2Ch-3Dh^2}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)-2C-6Dh}{2}\\&=\frac{f''(a)-2C}{2}\end{aligned}$$

となるので $C=\dfrac{f''(a)}{2}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^3}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ なので

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^3}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\bigl(f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+Dh^3\bigr)}{h^3}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-f''(a)h-3Dh^2}{3h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)-f''(a)-6Dh}{6h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f'''(a+h)-6D}{6}\\&=\frac{f'''(a)-6D}{6}\end{aligned}$$

となるので $D=\dfrac{f'''(a)}{6}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

以上により近似 3 次式は

$$f(x)=f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f'''(a)}{6}h^3$$

である。

演習問題 1.13　次の関数 $y=f(x)$ を $x=a$ で近似する 1 次式，2 次式，3 次式を求めよ。

(1) $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\quad(a=0)$　　(2) $f(x)=e^x\quad(a=1)$

(3) $f(x)=(x+1)^5\quad(a=0)$

ここでは演習問題 1.12 の成立を仮定した解答とする。最後に演習問題 1.12 の結果を使わない解答を (2) についてのみ述べる。 $x=a$ で $f(x)$ を近似する 1 次式，2 次式，3 次式をそれぞれ $g_1(h),g_2(h),g_3(h)$ とする。

(1) $f'(x) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$f''(x) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$f^{(3)}(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$f^{(4)}(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ なので $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$f'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，$f''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，$f^{(3)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$f^{(4)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。演習問題 1.12 より $x=0$ で $f(x)$ を近似する 1 次式，2 次式，3 次式はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
g_1(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h \\
g_2(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2 \\
g_3(h) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}h - \frac{1}{2\sqrt{2}}h^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}h^3
\end{aligned}
$$

である。

(2) $f'(x) = e^x$ より任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(x) = e^x$ である。$f(1) = f'(1) = f^{(2)}(1) = f^{(3)}(1) = f^{(4)}(1) = e$ なので

$$
\begin{aligned}
g_1(h) &= e + eh \\
g_2(h) &= e + eh + \frac{e}{2}h^2 \\
g_3(h) &= e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3
\end{aligned}
$$

である。

(3) $f'(x) = 5(x+1)^4$，$f''(x) = 20(x+1)^3$，$f^{(3)}(x) = 60(x+1)^2$，$f^{(4)}(x) = 120(x+1)^1$ より $f(0) = 1$，$f'(0) = 5$，$f''(0) = 20$，$f^{(3)}(0) = 60$，$f^{(4)}(0) = 120$ となる。よって

$$
\begin{aligned}
g_1(h) &= 1 + 5h \\
g_2(h) &= 1 + 5h + 10h^2 \\
g_3(h) &= 1 + 5h + 10h^2 + 10h^3
\end{aligned}
$$

である。

演習問題 1.12 の結果を使用しない解答を (2) の 3 次式の場合のみ述べる。やり方を見れば分かるように，演習問題 1.12 の結果を使用しない場合，演習問題 1.12 で議論したことをもう一度議論し直すことになる。

求める 3 次式を $g(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$ とする。

$$
\begin{aligned}
d(h) &= f(1+h) - g(h) = e^{1+h} - g(h) \\
\varepsilon(h) &= \frac{d(h)}{h^3}
\end{aligned}
$$

と置くと $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立している。$\lim_{h\to 0} d(h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h^3 = 0$ なので $d(0) = e^{1-0} - g(0) = e - A$ より $A = e$ を得る。

$\lim_{h\to 0}\dfrac{d(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h^2 = 0$ なので

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h}-(e+Bh+Ch^2+Dh^3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h}-e}{h} - \lim_{h\to 0}(B+Ch+Dh^2) \\
&= f'(1) - B = e - B
\end{aligned}$$

より $B = e$ を得る。

$\lim_{h\to 0}\dfrac{d(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h = 0$ なので

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h}-(e+eh+Ch^2+Dh^3)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{1+h}\right)'-(e+2Ch+3Dh^2)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{1+h}\right)''-(2C+6Dh)}{2} \\
&= \frac{e-2C}{2}
\end{aligned}$$

より $C = \dfrac{e}{2}$ を得る。

$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ なので

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h}-(e+eh+\frac{e}{2}h^2+Dh^3)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{1+h}\right)'-(e+eh+3Dh^2)}{3h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{1+h}\right)''-(e+6Dh)}{6h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{1+h}\right)'''-6D}{6} \\
&= \frac{e-6D}{6}
\end{aligned}$$

より $D = \dfrac{e}{6}$ を得る。以上により

$$g(h) = e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3$$

を得る。

演習問題 1.14 定理の証明の最後の部分 (最小値 c が $a < c < b$ に存在するとき $f'(c) = 0$ となる) を証明せよ。

最小値を与える c が $a < c < b$ を満たしているとする。任意の h に対し $c+h$ が区間 $[\,a, b\,]$ に入っていれば $f(c+h) \geq f(c)$ が成立する。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$ なので

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成立する。また $h < 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ なので

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

が成立する。$0 \leq f'(c) \leq 0$ より $f'(c) = 0$ である。

演習問題 1.15　平均値の定理から系 1.20, 1.21,1.22 を導け。

最初に系 1.20 を示す。区間内の任意の x_1, x_2 について，$x_1 < x_2$ とすると平均値の定理よりある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。(1) の条件より $f'(c) = 0$ なので $f(x_2) - f(x_1) = 0$ 即ち任意の x_1, x_2 に対し $f(x_2) = f(x_1)$ が成立する。これは f が定数関数である事を示している。よって (1) が示された。

(2) は $h(x) = f(x) - g(x)$ とおき，$h(x)$ に (1) を適用する。$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ より区間 I において $h'(x) = 0$ なので $h(x)$ は定数関数である。これを C とすると，$f(x) = g(x) + h(x) = g(x) + C$ となる。

次に系 1.21 を示す。区間内の任意の x_1, x_2 について，$x_1 < x_2$ とすると平均値の定理よりある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。(1) の条件より $f'(c) > 0$ かつ $x_2 - x_1 > 0$ なので $f(x_2) - f(x_1) > 0$ である。即ち任意の x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成立する。これは f が単調増加関数である事を示している。よって (1) が示された。

(2) は，$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) < 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) < 0$ である。即ち任意の x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ となる。よって f は単調減少関数である。

最後に系 1.22 を示す。$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

と書ける。このとき (1) の条件より $f'(c) \geq 0$ となっている。また $x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ 即ち $f(x_1) \leq f(x_2)$ となる。よって f は単調非減少である。よって (1) が示された。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき (2) の条件より $f'(c) \leq 0$ となっている。$x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ 即ち $f(x_1) \geq f(x_2)$ となる。よって f は単調非増加である。

演習問題 *1.16　定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

f, g は a の周りで微分可能とする。$f(a) = g(a) = 0$ あるいは，$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ となるとき，$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，両者の値は一致する。ここで

a は $\pm\infty$ でもよい。

最初に $f(a)=g(a)=0$ の場合を証明する。$\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ および $\displaystyle\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ を証明すれば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が証明される。

$x>a$ の場合を考える。$f(a)=g(a)=0$ なので

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

が成立している。このとき定理 1.18 より $a<c<x$ となる c で

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

となるものが存在する。$x\to a+0$ とすると $c\to a+0$ となるので

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する。$x<a$ の場合も同様なので省略する。

次に $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ の場合を考える。$F(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ $(x\neq a)$，$F(a)=0$，$G(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ $(x\neq a)$，$G(a)=0$，とおくと F および G は $x=a$ で連続である。F,G に今証明したロピタルの定理の $f(a)=g(a)=0$ の場合を適用すると

$$\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。ここで $f(x)F(x)=1$ より $f'(x)F(x)+f(x)F'(x)=0$ 即ち $F'(x)=-\dfrac{f'(x)F(x)}{f(x)}$ が成立する。同様に $G'(x)=-\dfrac{g'(x)G(x)}{g(x)}$ が成立する。上式に代入すると

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\frac{g(x)}{f(x)}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。これを整理する

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

が得られる。ただし途中 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$ の収束を仮定した。