

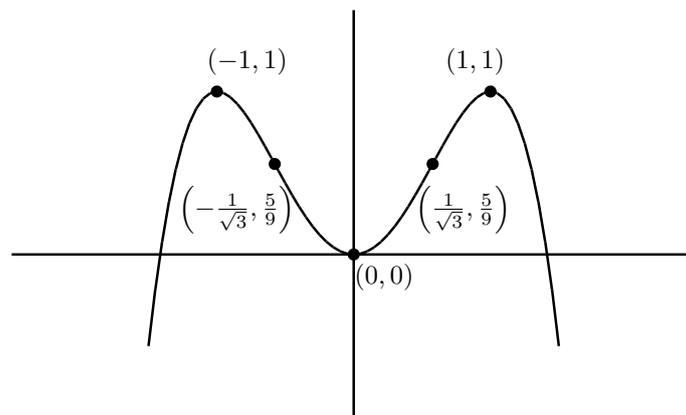
演習問題 1.29 次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

- (1) $f(x) = 2x^2 - x^4$ (2) $f(x) = xe^{-x}$
 (3) $f(x) = x^2 \log x$ (4) $f(x) = 3 \sin x + \sin 3x$
 (5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$ (6) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$
 (7) $f(x) = x + 2 \cos x$ (8) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$
 (9) $f(x) = x^{-x^2}$ (10) $y = (x - 5)^4(x + 1)^3$
 (11) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ (12) $y = e^{-x^2}$
 (13) $y = x \log x$

(1) $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 - x)(1 + x)$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1, 0, 1$ である。 $f''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1 - 3x^2)$ なので $f''(x) = 0$ となるのは $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。増減表は次のようになる。

x		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	↗	1	↘	$\frac{5}{9}$	↘	0	↗	$\frac{5}{9}$	↗	1	↘

$f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$ を解くと $x = 0, \pm\sqrt{2}$ となる。よって曲線は x 軸と 3 点で交わっている。 $(x = 0$ は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図のようになる。

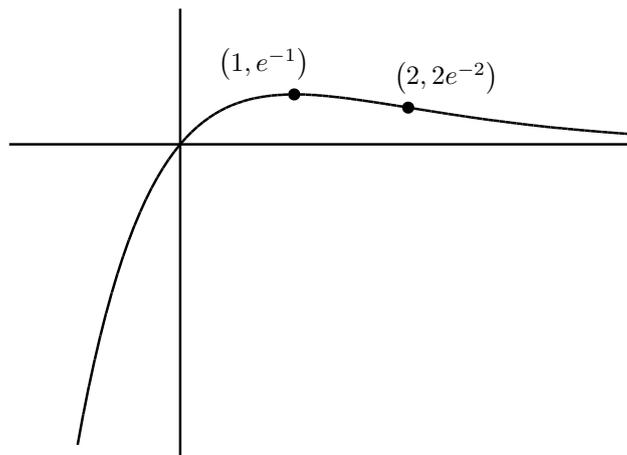


(2) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。 $f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x - 2)e^{-x}$ なので $f''(x) = 0$ となるのは $x = 2$ のときである。増

減表は次の様になる。

x		1		2	
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	e^{-1}	↘	$2e^{-2}$	↘

$f(x) = xe^{-x} = 0$ のとき $x = 0$ また $f(0) = 0$ なので x 軸, y 軸との交点は原点のみ。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ および $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ということに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(3) $\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。 $f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1) = 0$ を解いて, $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ を得る。 $f''(x) = 2 \log x + 2 + 1 = 2 \log x + 3$ なので $f''(x) = 0$ となるのは $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ である。 よって増減表は次の様になる。

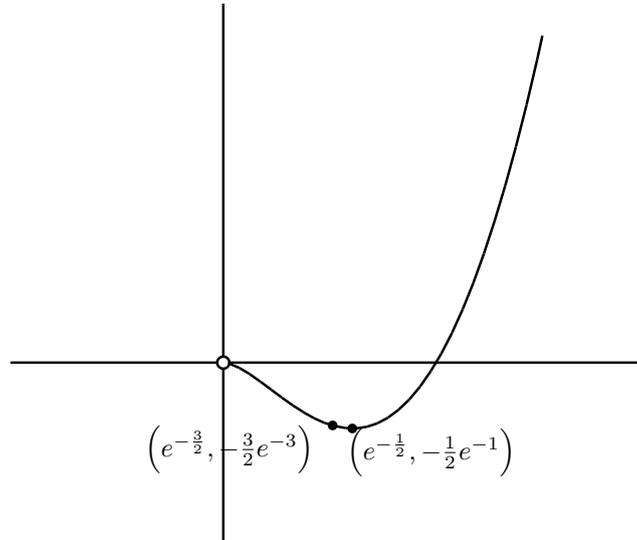
x		$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	↘	$-\frac{3}{2e^3}$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

$x \rightarrow +0$ としたときの関数の挙動を調べる。ここでロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であり、また $f(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。

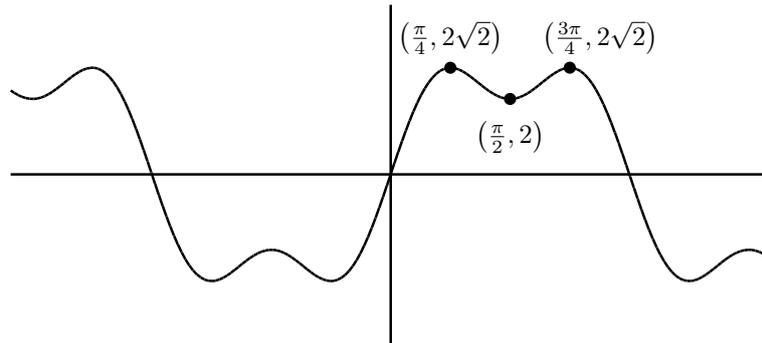


(4) $\sin x$ は周期 2π の周期関数であり、 $\sin 3x$ は周期 $\frac{2\pi}{3}$ の周期関数である。これより $f(x)$ は周期 2π の周期関数になる。また $f(-x) = -f(x)$ が成立する。よって $0 \leq x \leq \pi$ の範囲でグラフを描き、それを原点を中心に対象移動したグラフを描く。この $-\pi \leq x \leq \pi$ のグラフを x 軸の方向へ $2n\pi$ (n は整数) 平行移動したグラフ全体が求めるグラフとなる。よって $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で調べる。

$f'(x) = 3 \cos x + 3 \cos 3x = 3 \cos x + 3(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = 6 \cos x(2 \cos^2 x - 1)$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $\cos x = 0$ または $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ なので、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲では $x = \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi$ である。 $f''(x) = -3 \sin x - 9 \sin 3x = -6 \sin x(5 - 6 \sin^2 x)$ なので $f''(x) = 0$ となるのは $\sin x = 0$ または $\sin^2 x = \frac{5}{6}$ である。 $\sin^2 x = \frac{5}{6}$ となる x の値は正確に求めることはできないが、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin x = \sqrt{\frac{5}{6}}$ となる x を α 、 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ の範囲で $\sin x = \sqrt{\frac{5}{6}}$ となる x を β とすると、 $\sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{5}{6}} < 1$ より $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3}{4}\pi$ となっている。

よって増減表とグラフは次の様になる。

x	0		$\frac{1}{4}\pi$		α		$\frac{1}{2}\pi$		β		$\frac{3}{4}\pi$		π
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
$f''(x)$	0	-	-	-	0	+	+	+	0	+	+	+	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	↘	$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$	↘	2	↗	$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$	↗	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	↘	0



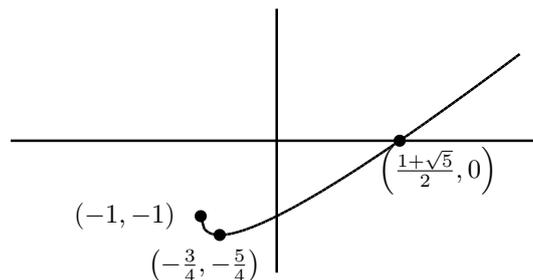
(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$ は $1+x \geq 0$ で定義されている。 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = -\frac{3}{4}$ である。 $f''(x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$ より $f''(x) = 0$ となることはない。 よって増減表は次のようになる。

x		$-\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+	+	+
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

$f(x) = 0$ とすると $x - \sqrt{1+x} = 0$ より $x = \sqrt{1+x}$ となる。両辺を 2 乗して

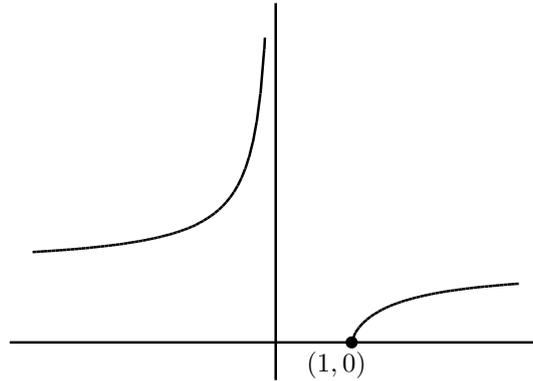
$$x^2 = 1+x$$

を得る。この 2 次方程式の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。しかし $x = \sqrt{1+x} \geq 0$ より $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ は不適である。また $f(0) = 0 - \sqrt{1+0} = -1$ である。以上のことに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(6) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ なので $1 - \frac{1}{x} \geq 0$ が必要である。 $x \geq 0$ のときは $1 \geq \frac{1}{x}$ より $x \geq 1$ である。 $x < 0$ のときは常に $1 - \frac{1}{x} \geq 0$ である。 $f'(x) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2}$ は $x = 1$ においては微分可能ではない。それ以外では $f'(x) > 0$ である。

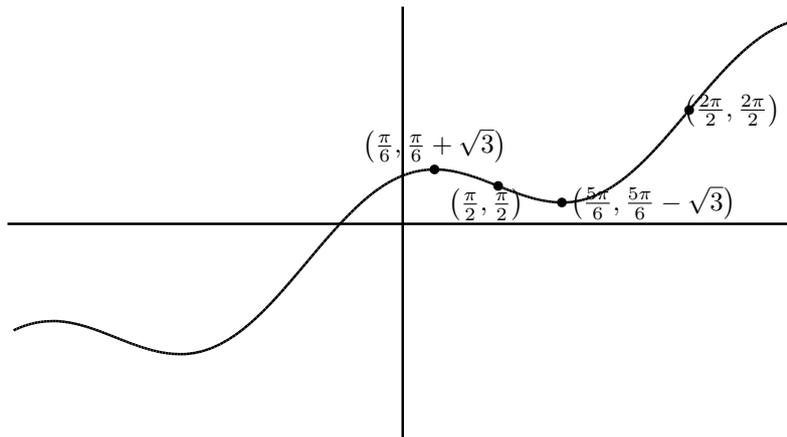
$$f''(x) = -\frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{x^4} - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{x^4} (6x - 5)$$
より $x < 0$ のとき $f''(x) > 0$ であり, $x > 1$ のとき $f''(x) < 0$ となる。 $\lim_{h \rightarrow -0} f(x) = \infty$ ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。



(7) $f(x) = x + 2 \cos x$ なので $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$ が成立する。 $0 \leq x \leq 2\pi$ でグラフを描いて, そのグラフを x 軸方向に $2n\pi$, y 軸方向に $2n\pi$ 移動したものが関数のグラフになる (ここで n は整数)。 $f'(x) = 1 - 2 \sin x$ なので, $f'(x) = 0$ となるのは $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ である。 $f''(x) = -2 \cos x$ なので $f''(x) = 0$ となるのは $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ である。

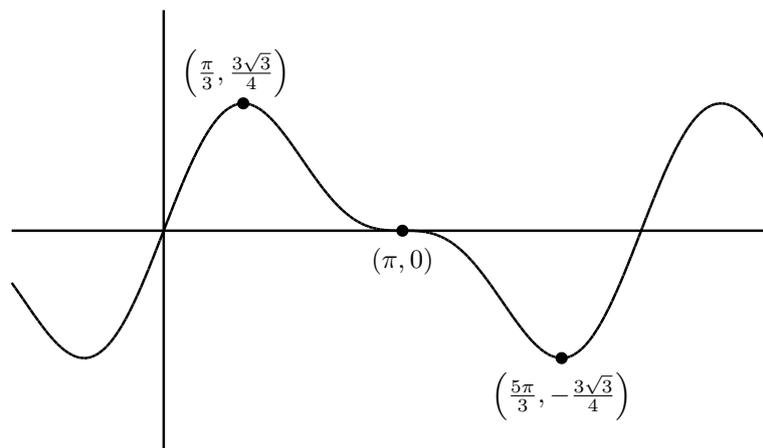
増減表とグラフは次のようになる。

x		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	↗	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗



(8) $f(x)$ は周期 2π の周期関数なので $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で考える。 $f'(x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$ である。 $f'(x) = 0$ のとき $\cos x + 1 = 0$ または $2\cos x - 1 = 0$ なので, $\cos x + 1 = 0$ のとき $x = \pi$ であり, $2\cos x - 1 = 0$ のとき $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ である。 $f''(x) = -\sin x(1 + 4\cos x)$ なので $f''(x) = 0$ とすると $\sin x = 0$ または $1 + 4\cos x = 0$ である。 $\sin x = 0$ のとき $x = 0, \pi, 2\pi$ となる。 $1 + 4\cos x = 0$ のときは, $0 \leq x \leq \pi$ で $\cos x = -\frac{1}{4}$ となる x を α , $\pi \leq x \leq 2\pi$ で $\cos x = -\frac{1}{4}$ となる x を β とすると $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi < \beta < \frac{5\pi}{3}$ となる。増減表およびはグラフ次の様になる。

x	0		$\frac{\pi}{3}$		α		π		β		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	0	-	-	-	0	+	+
$f''(x)$	0	-	-	-	0	+	0	-	0	+	+	+	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{3\sqrt{15}}{16}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{15}}{16}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0



(9) この問題で凹凸も含めきちんと議論するのは難しい様です。凹凸の議論の部分は青で書いておきますので, 興味のある人は参考にしてください。 $f(x) = x^{-x^2}$ なので定義域は $x > 0$ である。導関数を求めるのに対数微分法を用いる。 $y = x^{-x^2}$ とすると $\log y = -x^2 \log x$ である。両辺を x で微分すると $\frac{1}{y} y' = -2x \log x - x^2 \frac{1}{x} = -2x \log x - 1$ なので $y' = -x \cdot x^{-x^2} (2 \log x + 1)$ となる。 $f'(x) = 0$ とすると, $2 \log x + 1 = 0$ なので $x = e^{-\frac{1}{2}}$ となる。

$f''(x) = x^{-x^2} (x^2 (2 \log x + 1)^2 - (2 \log x + 1) - 2)$ となるが, $f''(x) = 0$ を満たす x は2つあり, それを α, β とするとき, $\alpha < e^{-1/2} < \beta$ となっていることを示す。 $f''(x)$ の正負を判定するために, $g(x) = x^2 (2 \log x + 1)^2 - (2 \log x + 1) - 2$ において, $g(x)$ の正負を判定する。 $u = 2 \log x + 1$ とおくと $x = e^{(u-1)/2}$ なので $g(x)$ を u で書き直すと

$$g(x) = e^{u-1} u^2 - u - 2$$

となる。 $h(u) = e^{u-1} u^2 - u - 2$ とおく。 $x : 0 \rightarrow \infty$ のとき, $u : -\infty \rightarrow \infty$ となる。 $h'(u) = e^{u-1} (u^2 + 2u) - 1$, $h''(u) = e^{u-1} (u^2 + 4u + 2)$ である。 $h''(u) = 0$ のとき $u = -2 \pm \sqrt{2}$ となる。

$u < -2 - \sqrt{2}$ のとき $h''(u) < 0$, $-2 - \sqrt{2} < u < -2\sqrt{2}$ のとき $h''(u) > 0$, $-2 + \sqrt{2} < u$ のとき $h''(u) > 0$ である。よって $h'(u)$ は $u < -2 - \sqrt{2}$ のとき増加の状態にあり, $-2 - \sqrt{2} < u < -2\sqrt{2}$ のとき減少の状態にあり, $-2 + \sqrt{2} < u$ のとき増加の状態にある。 $h'(-2) < 0$, $h'(0) < 0$, $-2 < -2 + \sqrt{2} < 0$ より $h'(-2 + \sqrt{2}) < 0$ が分かる。また

$$\begin{aligned} h'(-2 - \sqrt{2}) &= e^{-2 - \sqrt{2} - 1}(2 + 2\sqrt{2}) - 1 \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{2})}{e^{3 + \sqrt{2}}} - 1 < \frac{2(1 + \sqrt{2})}{e^3} - 1 \\ &= \frac{2}{e} \frac{1 + \sqrt{2}}{e} \frac{1}{e} - 1 \\ &< \frac{1}{e} - 1 < 0 \end{aligned}$$

となるので, ある実数 γ が存在して $u < \gamma$ のとき $h'(u) < 0$, $u > \gamma$ のとき $h'(u) > 0$ となっている。よって $h(u)$ は $u < \gamma$ で単調減少, $u > \gamma$ で単調増加である。 $\lim_{u \rightarrow \infty} h(u) = \infty$, $\lim_{u \rightarrow -\infty} h(u) = \infty$, $h(0) = -2$ となるので, 実数 α', β' が存在して, $\alpha' < 0 < \beta'$ かつ $u < \alpha'$ のとき $h(u) > 0$, $\alpha' < u < \beta'$ のとき $h(u) < 0$, $\beta' < u$ のとき $h(u) > 0$ となっている。 $\alpha = e^{(\alpha' - 1)/2}$, $\beta = e^{(\beta' - 1)/2}$ とおくと $\alpha < \frac{1}{\sqrt{e}} < \beta$ であり, $x < \alpha$ のとき $g(x) > 0$, $\alpha < x < \beta$ のとき $g(x) < 0$, $\beta < x$ のとき $g(x) > 0$ となる。

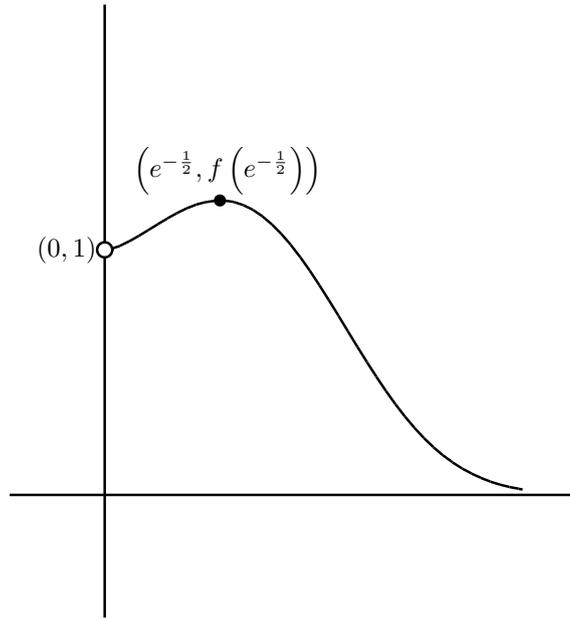
よって増減表は

x		α		$e^{-\frac{1}{2}}$		β	
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗		↘	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	↘		↘

となる。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である。また $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ を求める。 $\log y = -x^2 \log x$ の極限を求める。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x^2 \log x) = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-2 \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

なので, $0 = \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) = \log \left(\lim_{x \rightarrow +0} f(x) \right)$ となる。よって $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ となる。以上を考慮してグラフを書くと次図の様になる。



(10)

$$\begin{aligned}
 y' &= 4(x-5)^3(x+1)^3 + 3(x-5)^4(x+1)^2 \\
 &= (x-5)^3(x+1)^2\{4(x+1) + 3(x-5)\} \\
 &= (x-5)^3(x+1)^2(7x-11)
 \end{aligned}$$

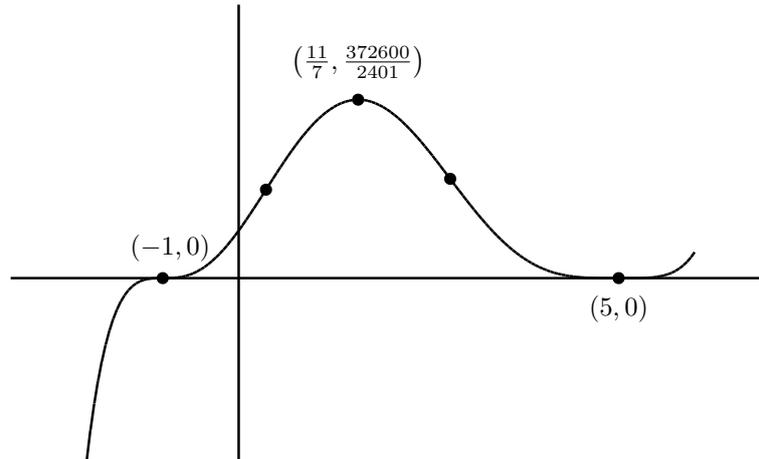
なので $y' = 0$ を解いて $x = -1, 5, \frac{11}{7}$ を得る。

$$y'' = 6(x-5)^2(x+1)(7x^2 - 22x + 7)$$

なので $y'' = 0$ を解いて $x = -1, 5, \frac{11+6\sqrt{2}}{7}, \frac{11-6\sqrt{2}}{7}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
y'	+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	0	+	0	-	-	-	0	+	0	+
y	↗		↗		↗		↘		↘		↗

x 軸との交点は $y = 0$ を解いて $x = -1, 5$ である。 y 軸との交点は y に $x = 0$ を代入して $(-5)^4 = 5^4$ である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次の様になっている。



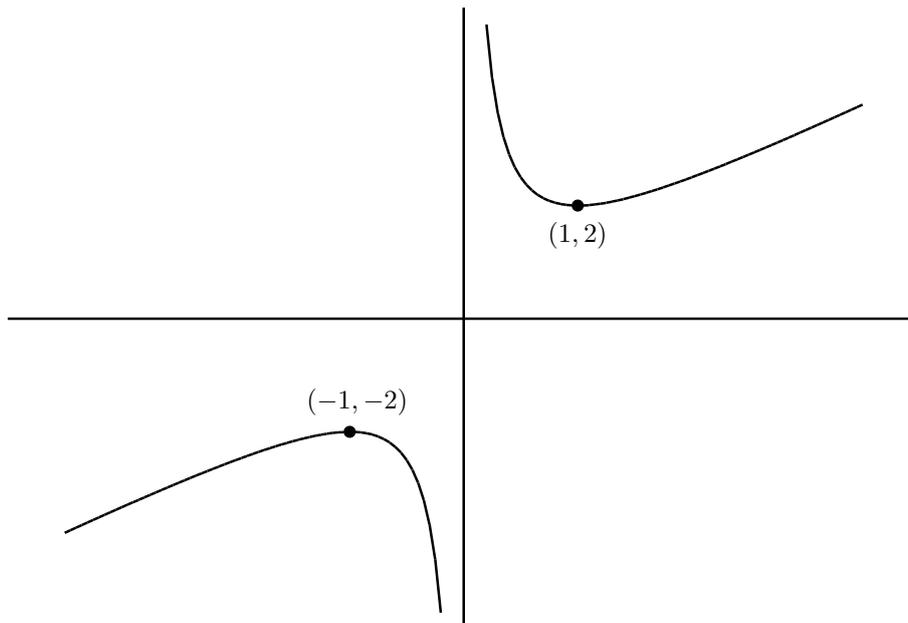
(11) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = -1, 1$ を得る。 $y'' = \frac{2}{x^3}$ なので増減表は次の様になる。

x		-1		0		1	
y'	+	0	-	×	-	0	+
y''	-	-	-	×	+	+	+
y	↗		↘	×	↘		↗

グラフは x 軸とも y 軸とも交わらない。

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

なのでグラフの概形は次の様になる。



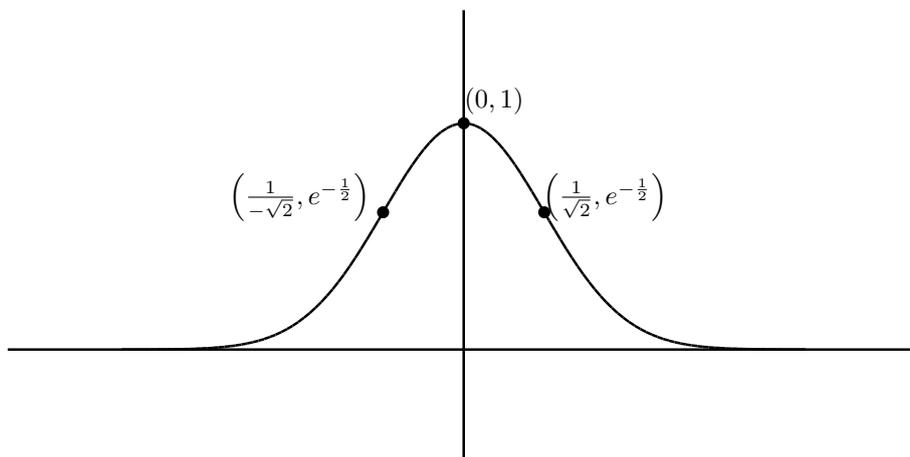
(12) $y' = -2xe^{-x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = 0$ を得る。 $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ なので $y'' = 0$ を解いて $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。よって増減表は次のようになる。

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	↗		↖		↘		↙

グラフは x 軸とは交わらない。 y 軸との交点は $y = 1$ である。また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



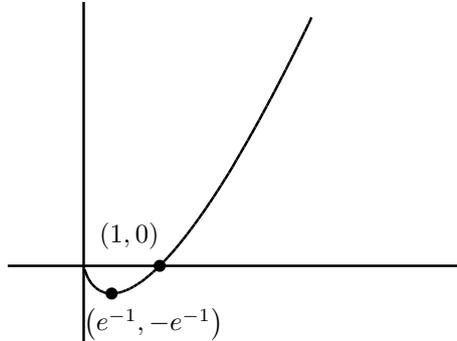
(13) $y' = \log x + 1$ なので $y' = 0$ を解いて $x = \frac{1}{e}$ を得る。 $y'' = \frac{1}{x}$ なので $y'' = 0$ となる x は存在しない。よって増減表は次のようになる。

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'	×	-	0	+
y''	×	+	+	+
y		↘		↗

x 軸との交点は $x = 1$ であり、 y 軸とは交わらない。また $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ である。この後学んだロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0 \end{aligned}$$

が分かる。以上からグラフの概形は次の様になっている。



演習問題 1.30 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

- (1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$
- (2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$
- (3) $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = 2t^4 - t$
- (4) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2 - t^4$

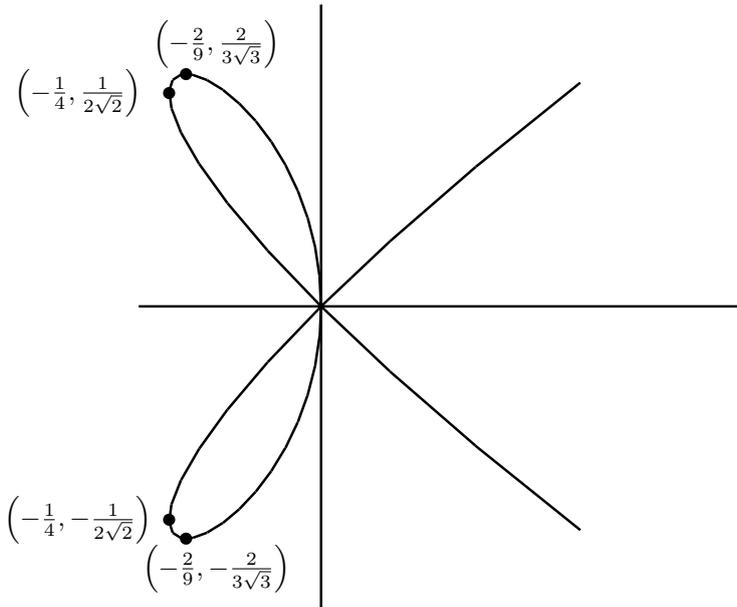
(1) $x'(t) = 4t^3 - 2t$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。 $y'(t) = 3t^2 - 1$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。 $x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
x	←		→	→	→		←	←	←		→
y'	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
y	↑	↑	↑		↓	↓	↓		↑	↑	↑
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖	↑	↗

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right),$
 $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right), (x(0), y(0)) = (0, 0), \left(x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$
 $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 0), (x(1), y(1)) = (0, 0), (x(-1), y(-1)) = (0, 0)$ なので y 軸との交点は $(0, 0)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。 x 軸との交点は $(0, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



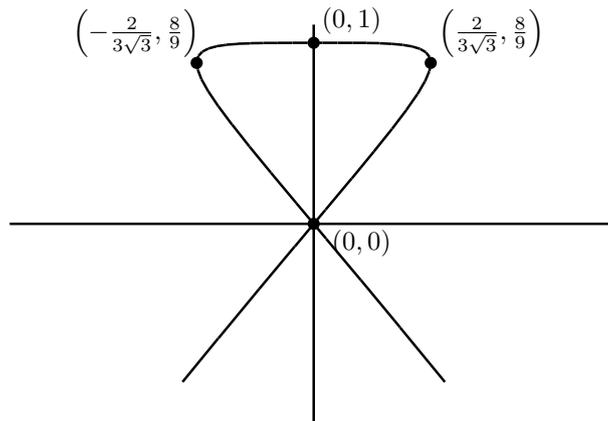
(2) $x'(t) = 1 - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。 $y'(t) = -4t^3$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = 0$ を得る。 $x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は以下のようになる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↑	↑	↑		↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $(x(1), y(1)) = (0, 0)$, $(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$ なので y 軸との交点は $(0, 0), (0, 1)$ である。

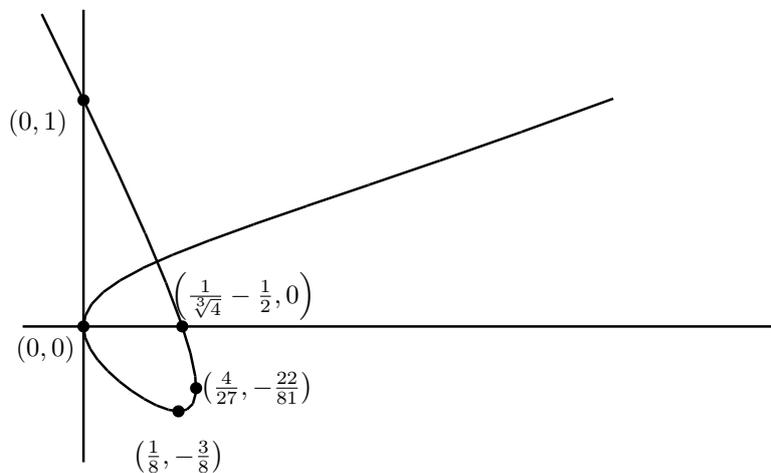
$y(t) = 0$ を解くと $t = \pm 1$ を得る。 x 軸との交点は $(0, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次のようになる。



(3) $x'(t) = 2t - 3t^2, y'(t) = 8t^3 - 1$ なので $x'(t) = 0$ を解くと, $t(2 - 3t) = 0$ より $t = 0, \frac{2}{3}$ を得る。 $y'(t) = 0$ を解くと, $8t^3 - 1 = (2t - 1)(4t^2 + 2t + 1) = 0$ より $t = \frac{1}{2}$ を得る。 $x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために, 途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	-	-	-	0	+	+	+
y	↓	↓	↓		↑	↑	↑
曲線	↙	↓	↘	→	↗	↑	↖

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(0, 0), \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right), \left(\frac{4}{27}, -\frac{22}{81}\right)$, である。 $x(t) = 0$ を解くと $t = 0, 1$ を得る。 y 軸との交点は $(0, 0), (0, 1)$ である。 $y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。 x 軸との交点は $(0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{2}, 0\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



(4) $x'(t) = 1 - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。 $y'(t) = -2t - 4t^3 = -2t(1 + 2t^2)$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = 0$ を得る。 $x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↑	↑	↑		↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $(x(1), y(1)) = (0, -1)$, $(x(-1), y(-1)) = (0, -1)$ なので y 軸との交点は $(0, 1), (0, -1)$ である。

$y(t) = 0$ を解く。 $A = t^2$ とおくと $A \geq 0$ である。 $t^4 + t^2 - 1 = A^2 + A - 1 = 0$ より $A = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ を得るが $A \geq 0$ より $A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ である。よって $t = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$ を得る。このとき $x(t)$ の値は $\pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。

