解析学 I 問題解説 $\sharp 11$

河野

演習問題 3.3　命題 3.5 を証明せよ。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left(2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}} = \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}} = \frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

なので，

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり有理関数の積分に帰着できる。

演習問題 3.4　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sin x\cos x$　　(2) $\sin^3 x$　　(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$　　(5) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　　(6) $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

(1)　**三角関数は積の形になっているときは和に直すことで積分が簡単になる場合が多い。**この場合は和を積に直すことは倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ を適応することに対応する。

$$\int \sin x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

(2)　積を和に直すことを繰り返し実行すると，または直接 3 倍角の公式を適用すると，

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

となるので。

$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$$

別の方法として，$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ と見て $u = \cos x$ と変数変換してもできる。

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = -\int \left\{1-u^2\right\}\,du$$
$$= \frac{1}{3}u^3 - u = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$$

(3)　$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \left\{\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right\}\,dt$$
$$= \log|1+t| - \log|1-t| = \log\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \log\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

(4)　$\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ なので $t = \sin x$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|\sin x|$$

(5)　$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}\,dt$$
$$= -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1+\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

(6)　$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\sin x - \cos x}\,dx = \int \frac{2}{t^2+2t-1}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}+1} - \frac{1}{t+\sqrt{2}+1}\right)\,dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}+1\right| - \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}+1\right|\right)$$

演習問題 3.5　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$　(3) $\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$　(5) $\sqrt{1-x^2}$

(1)　$\sqrt{2-3x^2} = \sqrt{3\left(\dfrac{2}{3}-x^2\right)} = \sqrt{3}\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2 - x^2}$ と変形できるので $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin t$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{3}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

(2)　$3+2x-x^2=4-x^2+2x-1=2^2-(x-1)^2$ となるので $u=x-1$ とおくと積分は

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}}\,du$$

となる。$u=2\sin t$ とおいて置換積分を実行する。

$$I=\int dt=t=\arcsin\frac{u}{2}=\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

(3)　$\sqrt{3x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{3}\sqrt{x^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$ と変形できるので $x=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sin t}$ とおいて置換積分を実行する。$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}$，$\sqrt{3x^2-2}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{2}{3}}=\sqrt{2}\frac{\cos t}{\sin t}$ より

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}\,dx&=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sin t}\sqrt{2}\frac{\cos t}{\sin t}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)dt\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int dt=-\frac{1}{\sqrt{2}}t=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}x}\right)\end{aligned}$$

(4)　$x=2\tan t$ とおくと $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{\cos^2 t}$ であり，$x^2+4=4(\tan^2 t+1)=\frac{4}{\cos^2 t}$ なので，積分は

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\int\frac{\cos t}{2}\frac{2}{\cos^2 t}\,dt=\int\frac{1}{\cos t}\,dt$$

となる。前問 (3) より

$$=\log\left|1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|-\log\left|1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

となるので $t=\arctan\frac{x}{2}$ を代入して

$$=\log\left|1+\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right|-\log\left|1-\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right|$$

(5)　$x=\sin t$ とおいて置換積分を実行する。途中 $\cos^2 t=\frac{\cos 2t+1}{2}$ を用いる。

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}\,dx&=\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int\{\cos 2t+1\}\,dt\\&=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{2}\left(t+\sin t\cos t\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)$ に $t=\arcsin t$ を代入した，$\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{4}(\sin 2\arcsin x)$ も勿論正解である。

演習問題 3.6　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　(3) $\sqrt{x^2+2}$

(4) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

(1)　$\sqrt{1-x^2}=t(x+1)$ または同じことだが $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおいて置換積分を実行する。両辺を 2 乗して，$t^2=\dfrac{1-x}{1+x}$ となる。x について解くと $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を得る。$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}$ であり，$\sqrt{1-x^2}=t(x+1)=t\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\dfrac{2t}{1+t^2}$ となる。

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{1+t^2}{2t}\left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)dt=-2\int\frac{1}{1+t^2}\,dt$$
$$=-2\arctan t=-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(2)　$\sqrt{x^2+1}=t-x$ とおいて置換積分を実行する。両辺を 2 乗すると $x^2+1=t^2-2tx+x^2$ であり，これを x について解くと，$x=\dfrac{t^2-1}{2t}$ となる，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+1}{2t^2}$ であり $\sqrt{x^2+1}=t-x=t-\dfrac{t^2-1}{2t}=\dfrac{1+t^2}{2t}$ となる。

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int\frac{2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt=\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\log|t|=\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

(3)　$\sqrt{x^2+2}=t-x$ とおいて置換積分を実行する。両辺を 2 乗すると $x^2+2=t^2-2tx+x^2$ であり，これを x について解くと，$x=\dfrac{t^2-2}{2t}$ となる，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+2}{2t^2}$ であり $\sqrt{x^2+2}=t-x=t-\dfrac{t^2-2}{2t}=\dfrac{t^2+2}{2t}$ となる。

$$\int\sqrt{x^2+2}\,dx=\int\frac{t^2+2}{2t}\frac{t^2+2}{2t^2}\,dt=\frac{1}{4}\int\left\{t+\frac{4}{t}+\frac{4}{t^3}\right\}dt$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2+4\log\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)-\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2}\right)$$

(4)　$\sqrt{4-x^2}=t(x+2)$ または同じことだが $t=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ とおいて置換積分を実行する。$t^2=\dfrac{2-x}{2+x}$ より $x=\dfrac{2-2t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{8t}{(1+t^2)^2}$，$\sqrt{4-x^2}=t(x+2)=\dfrac{4t}{1+t^2}$ となる。

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx=-\int\left(\frac{1+t^2}{2-2t^2}\right)^2\frac{1+t^2}{4t}\frac{8t}{(1+t^2)^2}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\left\{\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}\right\}dt$$
$$=-\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}=-\frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$$

演習問題 3.7　$x \geq 1$ のとき $I_2 = \pi + I_1$ を示せ。

不定積分の結果が正しいとすれば

$$F(x) = 2\arctan(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \arcsin\frac{1}{x}$$

とおけば $F'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = 0$ となるので $F(x)$ は定数である。$x = 1$ を代入すると

$$F(1) = 2\arctan(1 + \sqrt{1^2 - 1}) + \arcsin\frac{1}{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

となり示されるが，これは積分の結果を使っているので方法に不満がある。ここでは積分の結果を使わないで逆三角関数の性質を用いて示そう。

$a = \arctan(x + \sqrt{x^2-1})$ とおくと $x + \sqrt{x^2-1} = \tan a$ $(-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2})$ である。また $b = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{x}$ とおくと $\dfrac{1}{x} = \sin 2b$ $(-\dfrac{\pi}{2} \leq 2b \leq \dfrac{\pi}{2})$ である。

$$\frac{\pi}{2} - b = a$$

を示せばよい。今 $x \geq 1$ より $b > 0$ である。よって $0 \leq \dfrac{\pi}{2} - b < \dfrac{\pi}{2}$ が成立している。このとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \tan a$$

が示されれば証明が終わる。

$x = \dfrac{1}{\sin 2b}$ より

$$\begin{aligned}
\tan a &= x + \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\sin 2b} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2b} - 1} = \frac{1}{\sin 2b} + \sqrt{\frac{\cos^2 2b}{\sin^2 2b}} \\
&= \frac{1}{\sin 2b} + \frac{\cos 2b}{\sin 2b} = \frac{\cos^2 b + \sin^2 b}{2\sin b\cos b} + \frac{\cos^2 b - \sin^2 b}{2\sin b\cos b} \\
&= \frac{2\cos^2 b}{2\sin b\cos b} = \frac{\cos b}{\sin b} \\
\tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos b - \cos\frac{\pi}{2}\sin b}{\cos\frac{\pi}{2}\cos b + \sin\frac{\pi}{2}\sin b} = \frac{\cos b}{\sin b}
\end{aligned}$$

よって $\tan a = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - b\right)$ が示された。

演習問題 3.8　今までは学んだ事に対応する演習問題で，演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚 (?) を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない (?)。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$

(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

(4) $x \arcsin x$

(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$

(6) xe^{-x}

(7) $x \cos x$

(8) $x^2 \sin x$

(9) e^{3x+1}

(10) $2x \arctan x$

(11) $\log(2x+1)$

(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$

(13) $x^2 \log x$

(14) xe^{2x^2+3}

(15) $\dfrac{e^x}{x} + e^x \log x$

(16) $\arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$

(18) $\cos^n x \sin x$

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$

(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$

(21) $\sin(\log x)$

(22) $x^3 e^x$

(23) $x^4 e^x$

(24) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$

(25) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(26) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$

(27) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(28) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$

(29) $\dfrac{1}{\sin x \cos^5 x}$

(30) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$

(31) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$

(32) $\dfrac{1}{3+\cos x}$

(33) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$

(34) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$

(35) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(36) $\sqrt{x^2-1}$

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(38) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

(39) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(40) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$

(41) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$

(42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(43) $\dfrac{1}{4+x^2}$

(44) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

(45) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(46) $3x^2e^{x^3+1}$

(47) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$

(48) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(49) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$

(50) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$

(51) $\dfrac{3}{x^3-1}$

(52) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$

(53) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$

(54) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

(55) $\dfrac{\sin x \cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

(56) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(57) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

(58) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$

(59) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

(60) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$

(61) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$

(62) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(63) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$

(64) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$

(65) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$

(66) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$

(67) $\dfrac{12}{x^3-8}$

(68) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

(69) $\sin 4x$

(70) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$

(71) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$

(72) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$

(73) $\log(1+\sqrt{x})$

(74) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

(75) $3x^2(x^3+5)^6$

(76) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$　　(77) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　(78) $e^{ax}\cos bx$
(79) $e^{ax}\sin bx$

問題が長いので解説の前に被積分関数をもう一度書いておく。

(1)　$\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$：いきなり「ルートのなかの 2 次式」を解く方法でやってもできるが，$\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x+x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -x\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - x\sqrt{1-x^2}$ と変形してから考えたほうが簡単かもしれない。$t = 1-x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = -2x$ である。

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\left\{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - x\sqrt{1-x^2}\right\}dx = \int\left(\frac{x}{\sqrt{t}} - x\sqrt{t}\right)\left(-\frac{1}{2x}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int\left\{\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right\}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3}$$

(2)　$\cos^2 x - \sin^2 x$：三角関数の積は和に直すというのが一般的な考え方だが，この場合は加法定理の形そのものである。

$$\int\left\{\cos^2 x - \sin^2 x\right\}dx = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$$

(3)　$\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$：$\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^{3/2}}$ と見ると $u = 1+x^2$ と置けばよいことに気づくだろう。

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\,du = -\frac{1}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(4)　$x\arcsin x$：部分積分法。

$$I = \int x\arcsin x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\arcsin x\,dx = \frac{1}{2}x^2\arcsin x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

となるが，第 2 項の積分は $x = \sin t$ とおくと

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \sin^2 t\,dt = \int\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin t\cos t$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

となるので

$$I = \frac{1}{2}x^2\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$$

(5)　$\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$：部分積分を 2 回，一般的な形を後の (78) で考える。

$$I = \int e^{-3x}\cos 2x\,dx = \int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\cos 2x\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x - \frac{2}{3}\int e^{-3x}\sin 2x\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x - \frac{2}{3}\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\sin 2x\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{-3x}\sin 2x - \frac{4}{9}I$$

となるので，整理すると

$$I = \frac{1}{13}\left(-3e^{-3x}\cos 2x + 2e^{-3x}\sin 2x\right)$$

(6)　xe^{-x}：部分積分法。

$$\int xe^{-x}\,dx = \int x\left(-e^{-x}\right)'\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

(7)　$x\cos x$：部分積分法。

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$$

(8)　$x^2\sin x$：部分積分法 2 回。

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= \int x^2\,(-\cos x)'\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx \\ &= -x^2\cos x + \int 2x\,(\sin x)'\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\end{aligned}$$

(9)　e^{3x+1}：簡単な置換積分法。$t = 3x+1$ とおく。

$$\int e^{3x+1}\,dx = \int \frac{1}{3}e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{3x+1}$$

(10)　$2x\arctan x$：部分積分法。

$$I = \int 2x\arctan x\,dx = \int \left(x^2\right)'\arctan x\,dx = x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

ここで

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int \left\{1 - \frac{1}{1+x^2}\right\}dx = x - \arctan x$$

なので

$$I = x^2\arctan x - x + \arctan x$$

(11)　$\log(2x+1)$：簡単な置換積分法 + 部分積分法。$t = 2x+1$ とおく。

$$\int \log(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \log t\,dt = \frac{1}{2}\left(t\log|t| - t\right) = \frac{1}{2}\left((2x+1)\log|2x+1| - (2x+1)\right)$$

(12)　$\dfrac{1}{x(\log x)^n}$：$\dfrac{1}{x(\log x)^n} = (\log x)'\dfrac{1}{(\log x)^n}$ と考えると…。$t = \log x$ とおく。$n = 1$ のときは

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log|\log x|$$

$n \neq 1$ のときは

$$\int \frac{1}{x(\log x)^n}\,dx = \int \frac{1}{t^n}\,dt = \frac{t^{1-n}}{1-n} = \frac{(\log x)^{1-n}}{1-n}$$

(13) $x^2 \log x$：部分積分法。

$$\int x^2 \log x\,dx = \int \left(\frac{1}{3}x^3\right)' \log x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3$$

(14) xe^{2x^2+3}：置換積分法。$t = 2x^2+3$ とおく。

$$\int xe^{2x^2+3}\,dx = \int \frac{1}{4}e^t\,dt = \frac{1}{4}e^{2x^2+3}$$

(15) $\dfrac{e^x}{x} + e^x \log x$：一方の関数を部分積分すると他の関数と打ち消しあって…。

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{x} + e^x \log x\,dx &= \int \frac{e^x}{x}\,dx + \int (e^x)' \log x\,dx = \int \frac{e^x}{x}\,dx + e^x\log x - \int \frac{e^x}{x}\,dx \\ &= e^x \log x\end{aligned}$$

(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$： この様な問題の場合試行錯誤でやるしかない。色々な置き方を試してうまくいくものを探す。まず思いつくのは $t = \dfrac{x}{x+1}$ とおくことだろう。しかしこれを実行すると (各自計算してみること), $\displaystyle\int \frac{2t}{(1-t^2)^2}\arcsin\sqrt{t}\,dt$ となりこの積分は難しそうである。そこで $t = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおくと $\displaystyle\int t\frac{2\sin t}{\cos^3 t}\,dt$ となる。$(\tan^2 t)' = \dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}$ に気が付くと部分積分を実行して…。

$t = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおくと $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} = \sin t$ より $\dfrac{x}{x+1} = \sin^2 t$ である。これを x について解くと $x = \dfrac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = \tan^2 t$ である。$dx = (\tan^2 t)'dt$ より

$$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx = \int t\left(\tan^2 t\right)'\,dt = t\tan^2 t - \int \tan^2 t\,dt$$

となる。

$$\begin{aligned}\int \tan^2 t\,dt &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \int \left\{\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right\}\,dx \\ &= \tan t - t\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx &= t\tan^2 t - \tan t + t \\ &= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\end{aligned}$$

(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$: $(2x+1)\sin(x^2+x+1) = (x^2+x+1)'\sin(x^2+x+1)$ なので…。
$t = x^2+x+1$ とおく。

$$\int (2x+1)\sin(x^2+x+1)\,dx = \int \sin t\,dt = -\cos t = -\cos(x^2+x+1)$$

(18) $\cos^n x\sin x$: $\cos^n x\sin x = -\cos^n x(\cos x)'$ なので…。
$t = \cos x$ とおく。

$$\int \cos^n x\sin x\,dx = -\int t^n\,dt = -\frac{1}{n+1}t^{n+1} = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x$$

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$: 部分積分法 2 回。

$$\begin{aligned}\int (ax^2+bx+c)e^x\,dx &= \int (ax^2+bx+c)\,(e^x)'\,dx = (ax^2+bx+c)e^x - \int (2ax+b)\,(e^x)'\,dx \\ &= (ax^2+bx+c)e^x - (2ax+b)e^x + \int 2ae^x\,dx = (ax^2+(b-2a)x+c-b+2a)e^x\end{aligned}$$

(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$: (16) で述べたように，どう変数変換するかは試行錯誤でやるしかない。少し積分に慣れれば，$\arcsin x$ を消すという考え方でも,「ルートの中の 2 次式」という見方からも，次のようにおくのは気がつくと思う。この解説を見なくても自分でできた人はかなり積分に精通しつつあるといえる。
$t = \arcsin x$ とおくと，$x = \sin t$ より $1-x^2 = \cos^2 t$ である。

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx &= \int \frac{t}{\cos^2 t}\,dt = \int t\,(\tan t)'\,dt = t\tan t - \int \tan t\,dt \\ &= t\tan t + \log|\cos t| = \frac{t\sin t}{\cos t} + \frac{1}{2}\log|\cos t|^2 \\ &= \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\log|1-x^2|\end{aligned}$$

(21) $\sin(\log x)$: $t = \log x$ とおき $\displaystyle\int e^t\sin t\,dt$ と変形。(79) 参照。

$$\begin{aligned}I = \int e^t\sin t\,dt &= \int (e^t)'\sin t\,dt = e^t\sin t - \int e^t\cos t\,dt \\ &= e^t\sin t - e^t\cos t + \int e^t\sin t\,dt = e^t\sin t - e^t\cos t + I\end{aligned}$$

となるので

$$\int \sin(\log x)\,dx = \frac{x\,(\sin(\log x) - \cos(\log x))}{2}$$

(22) x^3e^x : 部分積分。

$$\begin{aligned}\int x^3e^x\,dx &= \int x^3\,(e^x)'\,dx = x^3e^x - \int 3x^2e^x\,dx = x^3e^x - \left(3x^2e^x - \int 6xe^x\,dx\right) \\ &= \left(x^3-3x^2+6x+6\right)e^x\end{aligned}$$

(23) x^4e^x：部分積分。

$$\int x^4 e^x\,dx = x^4e^x - \int 4x^3e^x\,dx = \left(x^4-4x^3\right)e^x + \int 12x^2e^x\,dx$$
$$= \left(x^4-4x^3+12x^2\right)e^x - \int 24xe^x\,dx = \left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)e^x$$

(24) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$：因数分解が問題。やり方は以前やった x^4+1 と同じで，$x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$ と 2 乗の差にして因数分解を実行する。あとは有理関数の積分の定石で部分分数展開して…。

$$\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \left\{\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(\log(x^2+x+1)-\log(x^2-x+1)\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

(25) $\dfrac{1}{1+x^2}$：$x=\tan t$ と置換積分。

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int dt = t = \arctan x$$

(26) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$：$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x^2+1}$ と部分分数展開。

$$\int \frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)$$

(27) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」である。三角関数を用いる方法，無理式を用いる方法のどちらでもできるが，計算の難度は異なる。
$x=2\sin t$ とおく。

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int dt = t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(28) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$：$I_n = \displaystyle\int \frac{1}{\cos^n x}dx$ とおき漸化式を求める。

$$\begin{aligned} I_n &= \int\left\{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^n x}\right\}dx = I_{n-2} + \int \sin x\left(\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}x}\right)'dx \\ &= \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}} \end{aligned}$$

また

$$I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (\tan x)'\,dx = \tan x$$

漸化式を繰り返し適用すれば求まる。

$$\begin{aligned} I_8 &= \frac{6}{7}I_6 + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} = \frac{6}{7}\left(\frac{4}{5}I_4 + \frac{\sin x}{5\cos^5 x}\right) + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} \\ &= \frac{6}{7}\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}I_2 + \frac{\sin x}{3\cos^3 x}\right) + \frac{6}{7}\frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} \\ &= \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{6}{7}\frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} \end{aligned}$$

(29) $\dfrac{1}{\sin x\cos^5 x}$ ： $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいても計算できるが計算が複雑になるので，他の方法がある場合はそれで計算したほうがよい。この場合は $t = \tan x$ とおいた方が計算は簡単である。一般に $\sin x$ と $\cos x$ の偶数乗，例えば $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x\cos x$ などは $\tan x$ で表すことができる。
$t = \tan x$ とおくと $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x\cos^5 x}\cos^2 x\,dt = \int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}\,dt$ となる。$\sin x\cos x = \dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{t}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$
となるので $I = \displaystyle\int \frac{(1+t^2)^2}{t}\,dt$ となる。

$$I = \int \frac{1}{\sin x\cos^5 x}\,dx = \int \left\{\frac{1}{t} + 2t + t^3\right\} dt = \log|\tan x| + \tan^2 x + \frac{1}{4}\tan^4 x$$

(30) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$ ：これは $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくしかないようである。$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1+t^2}{2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $1+\sin x = \dfrac{(1+t)^2}{1+t^2}$, $1+\cos x = \dfrac{2}{1+t^2}$ なので

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{(1+t)^2}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2}\frac{2}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

(31) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$ ：t$=a-x$ とおくと…。

$$\int \frac{x}{\sqrt{a-x}}\,dx = \int \frac{a-t}{\sqrt{t}(-1)}\,dt = \frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a-x}$$

(32) $\dfrac{1}{3+\cos x}$ ：$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\int \frac{1}{3+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)$$

(33) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$ ：$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx &= \int \frac{2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2(t+1)}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2t}{(t+1)(1+t^2)}\,dt \\ &= \int \left\{\frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right\} dt = \frac{1}{2}\log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \frac{x}{2} - \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| \end{aligned}$$

(34) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$: $t=e^x$ とおくと，$\displaystyle\int \frac{t^3}{(t^2+1)^4}\,dt$ となる。$\dfrac{t^3}{(t^2+1)^4}=\dfrac{t^3+t}{(t^2+1)^4}-\dfrac{t}{(t^2+1)^4}=\dfrac{t}{(t^2+1)^3}-\dfrac{t}{(t^2+1)^4}$ なので…。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(e^x+e^{-x})^4}\,dx &= \int \left\{\frac{t}{(t^2+1)^3}-\frac{t}{(t^2+1)^4}\right\} dt = \frac{1}{6(t^2+1)^3}-\frac{1}{4(t^2+1)^2}\\ &= -\frac{3e^{2x}+1}{12\left(e^{2x}+1\right)^3}\end{aligned}$$

(35) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

(36) $\sqrt{x^2-1}$：「ルートの中の 2 次式」。

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$$

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \log\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)$$

(38) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。$x=\tan t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\cos^2 t}$，$1+x^2=1+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\dfrac{1}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\cos t\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dx = -\frac{1}{\sin t}$$

$x=\tan t$, $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ なので

$$= -\frac{1}{\tan t\cos t} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$t=\arctan x$ を直接代入して $-\dfrac{1}{\sin\left(\arctan x\right)}$ でも正解である。

(39) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。
$x=\tan t$ とおく。

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \cos^3 t\left(1-\frac{\sin 2t}{\cos^2 t}\right)\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int\left\{\cos t-\frac{\sin^2 t}{\cos t}\right\}dt\\ &= \int\left\{\cos t-\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\right\}dt = \int\left\{2\cos t-\frac{1}{\cos t}\right\}dt = 2\sin t-\int\frac{1}{\cos t}\,dt\end{aligned}$$

$J=\displaystyle\int \frac{1}{\cos t}\,dt$ は $u=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ として計算してもよいが，変数を x に戻すと

$$J=\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\quad なので$$

$$I=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$

(40) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。$x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ なので $u=x+1$ とおき，更に $u=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin t}$ とおく。

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx=-\int \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{2}\cos t}\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t}\,dt=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\,dt$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}t=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right)$$

(41) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。$x=a\tan t$ とおくと，$I=\dfrac{1}{a^4}\displaystyle\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt$ となるので $u=\sin t$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\frac{1}{a^4}\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt=\frac{1}{a^4}\int\frac{\cos t(1-\sin^2 t)}{\sin^4 t}\,dt=\frac{1}{a^4}\int\left\{\frac{1}{u^4}-\frac{1}{u^2}\right\}du$$
$$=\frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{3u^2}\right)=\frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{3\sin^3 t}\right)$$

ここで $x=a\tan t$，$\sqrt{x^2+a^2}=\dfrac{a}{\cos t}$ より $\dfrac{1}{\sin t}=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$ なので

$$=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x}-\frac{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}{3a^4x^3}$$

(42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$ ：$t=\sqrt{1+x^6}$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2-1}\,dt=\frac{1}{6}\int\left\{\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right\}dt$$
$$=\frac{1}{6}\left(\log|t-1|-\log|t+1|\right)=\frac{1}{6}\left(\log\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)-\log\left(\sqrt{1+x^6}+1\right)\right)$$

(43) $\dfrac{1}{4+x^2}$ ：$x=2\tan t$ とおくと…

$$\int\frac{1}{4+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(44) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ ：$t=\sqrt[3]{x+1}$ とおくと…。

$$\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx=\int\frac{3t^2}{1+t}\,dt=3\int\left\{t-1+\frac{1}{1+t}\right\}dt$$
$$=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\log\left((x+1)^{\frac{1}{2}}+1\right)$$

(45) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ ：これは有理関数の積分。部分分数展開して⋯。

$\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{g(x)}{(x^2+1)^2}$ ($g(x)$ は 3 次式) とおき $A, B, g(x)$ を求める。右辺を通分して分子を比較すると

$$x(x^2+3) = A(x+1)(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1) + g(x)(x-1)(x+1)$$

与式に $x=1$ を代入すると $A=\dfrac{1}{2}$，$x=-1$ を代入すると $B=\dfrac{1}{2}$ が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{(x^2+1)^2} &= \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2-1} \\
&= \frac{-x}{x^2-1}\frac{x^2+3-(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x}{x^2-1}\frac{(x^2-1)(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-x\big((x^2+1)+1\big)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

より

$\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}
\int \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx &= \int \left\{ \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right\} dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\log|x+1| + \log|x+1| - \log(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} \right)
\end{aligned}$$

(46) $3x^2 e^{x^3+1}$ ：典型的な置換積分。慣れてきた人は見た瞬間に分かると思う。

$$\int 3x^2 e^{x^3+1}\,dx = e^{x^3+1}$$

(47) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$ ：これは有理関数の積分。

$\dfrac{1}{x^3(x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{g(x)}{x^3}$ ($g(x)$ は 2 次式) とおき，$A, g(x)$ を求める。右辺を通分して分子を比較すると

$$1 = Ax^3 + g(x)(x+1)$$

与式に $x=-1$ を代入すると $A=-1$ を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{x^3} &= \frac{1}{x^3(x+1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^3(x+1)} + \frac{x^3}{x^3(x+1)} = \frac{x^3+1}{x^3(x+1)} \\
&= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^3(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{x^3(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ と部分分数展開できるので

$$\int \frac{1}{x^3(x+1)}\,dx = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

(48) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$: これも有理関数の積分。ただし部分分数展開の後 $\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$ の積分が出てくるので，分母の次数を下げる変形が必要になる。$n=1, a=\sqrt{2}$ なので次数を下げる式は

$$J_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2} + J_1\right)$$

となる。$\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{g(x)}{(x^2+2)^2}$ ($g(x)$ は 3 次式) とおき，$A, g(x)$ を求める。右辺を通分して分子を比較すると

$$2x^2+x+4 = A(x^2+2)^2 + g(x)x$$

$x=0$ を代入すると $A=1$ を得る。

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(2x^2+x+4-(x^2+2)^2\right) = -x^3-2x+1 = -x(x^2+2)+1$$

より $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+2} + \dfrac{1}{(x^2+2)^2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}\,dx &= \int\left\{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{(x^2+2)^2}\right\}dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

(49) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$: と部分分数展開する。$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ 等を分母の次数を下げて計算するので，分母の次数を下げる変形が必要になる。$J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ とすると $J_3 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{(x^2+1)^2} + 3J_2\right)$, $J_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1} + J_1\right)$ である。

$x^4-x^3-3x^2-x$ を x^2+1 で割って行くと

$$x^4-x^3-3x^2-x = (x^2+1)^2 - (x+5)(x^2+1) + 4$$

なので $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3} = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x+5}{(x^2+1)^2} + \dfrac{4}{(x^2+1)^3}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}\,dx &= \int\left\{\frac{1}{x^2+1} - \frac{x+5}{(x^2+1)^2} + \frac{4}{(x^2+1)^3}\right\}dx \\ &= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx - 5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx + 4\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx \\ &= J_1 + \frac{1}{2(x^2+1)} - 5J_2 + 4J_3 = J_1 + \frac{1}{2(x^2+1)} - 5J_2 + \left(\frac{x}{(x^2+1)^2} + 3J_2\right) \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + J_1 - 2J_2 \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + J_1 - \left(\frac{x}{x^2+1} + J_1\right) \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}\end{aligned}$$

(50) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$: これも有理関数の積分，分母を因数分解して⋯。
$f(x)=x^4-x^3-x+1$ とおくと $f(1)=0$ なので $x-1$ を因数に持つ。$x-1$ で割った結果の多項式も $x-1$ で $x=1$ を解にもつので $f(x)=(x-1)^2(x^2+x+1)$ と因数分解できる。

$$\frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}=\frac{(x^4-x^3-x+1)+3x}{x^4-x^3-x+1}=1+\frac{3x}{x^4-x^3-x+1}$$

$\dfrac{3x}{x^4-x^3-x+1}=\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}+\dfrac{g(x)}{x^2+x+1}$ ($f(x),g(x)$ は 1 次式) とおき，$f(x),g(x)$ を求める。右辺を通分して分子を比較して

$$3x=f(x)(x^2+x+1)+g(x)(x-1)^2 \tag{8}$$

式 (8) に $x=1$ を代入して $f(1)=1$ を得る。式 (8) の両辺を x で微分して

$$3=f'(x)(x^2+x+1)+f(x)(2x+1)+g'(x)(x-1)^2+g(x)2(x-1) \tag{9}$$

式 (9) に $x=1$ を代入して $3=3f'(1)+3f(1)$ より $f'(1)=0$ を得る。$f(x)=1$ より $g(x)=1$, よって $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}=1+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2+x+1}$ と部分分数展開できる。$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ なので $t=x+\dfrac{1}{2}$ とおくと $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx=\int\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$ となるので

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}\,dx&=\int\left\{1+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+x+1}\right\}dx\\&=x-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(51) $\dfrac{3}{x^3-1}$: これも有理関数の積分。$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{g(x)}{x^2+x+1}$ ($g(x)$ は 1 次式) とおく。右辺を通分して分子を比較すると

$$3=A(x^2+x+1)+g(x)(x-1)$$

$x=1$ を代入して $A=1,g(x)=-(x+2)$ を得る。$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ なので $t=x+\dfrac{1}{2}$ とおくと $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx=\int\frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$ となる。

$$\begin{aligned}\int\frac{3}{x^3-1}\,dx&=\int\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right\}dx\\&=\log|x-1|-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)\end{aligned}$$

(52) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$: $t=e^x$ とおくと，$I=\displaystyle\int\frac{1}{t^2+3t+4}dt$ となるので⋯。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{e^x+4e^{-x}+3}\,dx=\int\frac{1}{t^2+3t+4}\,dt&=\int\frac{1}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\,dx\\&=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(e^x+\frac{3}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(53) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいてもできるが (29) で述べた方法でもできる。$t=\tan x$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+3\cos^2 x}\frac{dx}{dt}\,dt \\ &= \int \frac{t^2}{4+t^2}\frac{1}{1+t^2}\,dx = \frac{1}{3}\int\left\{\frac{4}{4+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right\}dt \\ &= \frac{1}{3}\left(4\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right)-\arctan\left(\tan x\right)\right) \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right)-\frac{x}{3}\end{aligned}$$

(54) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$: $t=e^x$ とおくと…。

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{1}{t+\dfrac{1}{t}}\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t = \arctan(e^x)$$

(55) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$:倍角公式で 2 倍角の形に直した方が計算は簡単かもしれない。$t=\cos 2x$ とおく。

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x+1}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\arctan\left(\cos 2x\right)\end{aligned}$$

(56) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$: $t=\sqrt{1-x}$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{1-x}$$

(57) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$: $t=\sqrt{x}$ とおくと…。

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = 2\left(t-\arctan t\right) = 2\sqrt{x}-2\arctan\left(\sqrt{x}\right)$$

(58) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$: $t=\tan x$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2-\tan^2 x}\,dx &= \int \frac{1}{(2-t^2)(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{3}\int\left\{\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{t^2-2}\right\}dt \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt+\frac{1}{6\sqrt{2}}\int\left\{\frac{1}{t+\sqrt{2}}-\frac{1}{t-\sqrt{2}}\right\}dt \\ &= \frac{1}{3}\arctan t+\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\log|t+\sqrt{2}|-\log|t-\sqrt{2}|\right) \\ &= \frac{1}{3}x+\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\log|\arctan x+\sqrt{2}|-\log|\arctan x-\sqrt{2}|\right)\end{aligned}$$

(59) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ ：「ルートの中の 2 次式」$x=2\sin t$ とおく。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int dt = t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(60) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ ： $\dfrac{\cos x}{\sin^n x} = \dfrac{(\sin x)'}{\sin^n x}$ と見て…。

$$\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx = \frac{\sin^{1-n} x}{1-n}$$

(61) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{1-x^2}=t(x+1)$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx &= -2\int \frac{1}{t^2+3}\,dt = -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\end{aligned}$$

(62) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ：「ルートの中の 2 次式」$\sqrt{x^2-1}=t-x$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \log\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$$

(63) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$ ： $\dfrac{\log(\log x)}{x} = (\log x)'\log(\log x)$ なので $t=\log x$ とおくと…。

$$\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx = \int \log t\,dt = t\log t - t = \log x\log(\log x) - \log x$$

(64) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ ： $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{(a^3+x^3)'}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ と見て $t=a^3+x^3$ とおくと…。

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \frac{1}{2}\left(a^3+x^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

(65) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$ ： $t=\sqrt{1-x}$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,dx &= 2\int \frac{1}{t^2-2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left\{\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right\}dt\\ &\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{2}\right) - \log\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(66) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$ ： $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}\,dx &= -4\int \frac{t^2}{t^4-1}\,dx = \int\left\{\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \frac{2}{1+t^2}\right\}dt\\ &= \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right) - \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\end{aligned}$$

(67) $\dfrac{12}{x^3-8}$：有理関数の積分。

$$\int \frac{12}{x^3-8}\,dx = \int \left\{ \frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{x^2+2x+4} \right\} dx$$
$$= \log|x-2| - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

(68) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$：$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと…。

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)}\,dt = \int \left\{ \frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right\} dt$$
$$= 2\arctan t + \frac{2}{t+1} = x - \frac{2}{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+1}$$

(69) $\sin 4x$：簡単な置換積分。$t = 4x$ とおく。

$$\int \sin 4x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin t\,dt = \frac{1}{4}\cos 4x$$

(70) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$：$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}\,dx = \int \frac{t^2+1}{(t^2+4)(t-1)(t+1)}\,dt = \frac{1}{5}\int \left\{ \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{3}{t^2+4} \right\} dt$$
$$= \frac{1}{5}\left(\log|t-1| - \log|t+1| + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{5}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right| - \frac{1}{5}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| + \frac{3}{10}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

(71) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$：$t = \arctan x$ とおき，$I = \displaystyle\int t(\tan t - t)'dt$ 変形して部分積分。

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx = \int t\tan^2 t\,dt = \int t\,(\tan t - t)'\,dt = t\,(\tan t - t) - \int \{\tan t - t\}\,dt$$
$$= t\,(\tan t - t) + \log|\cos t| + \frac{1}{2}t^2$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\arctan^2 x + \log|\cos\arctan x|$$

(72) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$：$\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x} = -\dfrac{(\cos x)'}{3+\tan^2 x}$ と見る。$\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ は cos で表されるので $t = \cos x$ とおくと…。

$$\int \frac{\sin x}{3+\tan^2 x}\,dx = -\int \frac{t^2}{2t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\,dt - \frac{1}{2}\int dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{1}{2}t$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\cos x\right) - \frac{1}{2}\cos x$$

(73) $\log(1+\sqrt{x})$: $t=\sqrt{x}$ とおくと…。

$$\int \log(1+\sqrt{x})\,dx = 2\int t\log(t+1)\,dt = \int (t^2)'\log(t+1)\,dt = t^2\log(t+1) - \int \frac{t^2}{t+1}\,dt$$
$$= t^2\log(t+1) - \int \left\{t-1+\frac{1}{t+1}\right\}dt$$
$$x\log(\sqrt{x}+1)$$

(74) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$: $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおくと $t^2=\dfrac{1-x}{1+x}$ より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$…。

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = -\int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{4}{(1+t^2)^2}\,dt - \int \frac{4}{1+t^2}\,dt$$

漸化式 $J_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{t^2+1}+J_1\right)$ を用いて

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2\arctan t = (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(75) $3x^2(x^3+5)^6$: 展開して計算しても勿論できるが，$t=x^3+5$ とおくと…。

$$\int 3x^2(x^3+5)^6\,dx = \int t^6\,dt = \frac{(x^3+5)^7}{7}$$

(76) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{2+x-x^2}=t(2+x)$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}\,dx = -\int \frac{1}{t^2+4}\,dt = -\arctan\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$-\arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-x}1+x\right)$$

(77) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$: $x=a\sin t$ とおくと…。

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int \sin^2 t\,dt = a^2\int\left\{\frac{1-\cos 2x}{2}\right\}dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$$

(78) $e^{ax}\cos bx$:

(79) $e^{ax}\sin bx$: 2 つまとめて考える。

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx, \quad I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

とおく。部分積分を行うことにより

$$I_1 = \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)'\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_2$$

を得る。同様に

$$I_2 = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1$$

が分かるので，連立方程式を解いて

$$I_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} \left(a e^{ax} \cos bx + b e^{ax} \sin bx \right), \quad I_2 = \frac{1}{a^2 + b^2} \left(a e^{ax} \sin bx - b e^{ax} \cos bx \right)$$