解析学 I に対する追加説明 $\sharp 1$

- 演習問題 1.17 について説明する。
- $y = x^3 \log x$ の n 次導関数を求める。予想をするために何回か微分してみる。

$$
\begin{aligned}
y' &= 3x^2 \log x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \log x + x^2 \\
y'' &= 6x \log x + 3x^2 \frac{1}{x} + 2x = 6x \log x + 5x \\
y''' &= 6 \log x + 6x \frac{1}{x} + 5 = 6 \log x + 11 \\
y^{(4)} &= \frac{6}{x} \\
y^{(5)} &= -\frac{6}{x^2} \\
y^{(6)} &= \frac{12}{x^3} \\
y^{(7)} &= -\frac{36}{x^4}
\end{aligned}
$$

- $n \geq 4$ に関して $y^{(n)}$ の形を予想する。$\pm$ の部分，定数項の部分，x^k の部分の 3 つに分けて予想する。
- $\pm$ の部分は $(-1)^n$ または $(-1)^{n+1}$ である。偶数回微分した導関数の係数は $+$ なので $(-1)^n$ である。x^k の部分は n 次導関数は $\dfrac{1}{x^{n-3}}$ となっている。
- 係数の絶対値であるが，$n = 4$ のとき 6，$n = 7$ のとき $36 = 6 \cdot 6 = 6 \cdot 3!$ に気がつけば，$n = 6$ のとき $12 = 6 \cdot 2!$，$n = 5$ のとき $6 = 6 \cdot 1!$，$n = 4$ のとき $6 = 6 \cdot 0!$ となっているので

$$6 \cdot (n-4)!$$

と予想できる。

- 以上により $n \geq 4$ のとき

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{6 \cdot (n-4)!}{x^{n-3}}$$

と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

- $n=4$ のとき
$$y^{(4)}=\frac{6}{x}=(-1)^4\frac{6\cdot(4-4)!}{x^{(4-3)}}$$
となるので成立している。

- $n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $y^{(k)}=(-1)^k\dfrac{6\cdot(k-4)!}{x^{(k-3)}}$ の成立を仮定する。
$$\begin{aligned}y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'&=\left((-1)^k\frac{6\cdot(k-4)!}{x^{(k-3)}}\right)'\\&=(-1)^k 6\cdot(k-4)!\,(-(k-3))\,\frac{1}{x^{(k-3)-1}}\\&=(-1)^{k+1}\frac{6\cdot(k-3)!}{x^{k-4}}=(-1)^{k+1}\frac{6\cdot((k+1)-4)!}{x^{(k+1)-3}}\end{aligned}$$
となり $n=k+1$ でも成立している。

- $n\geq 4$ は一般的な式で書けるが，$n=1,2,3$ に関しては別に扱う必要がある。

- $\dfrac{1}{x^2-x}$ や $\sin x\cos x$ は予想する前に式を変形する方が見やすいかもしれない。

- $Y=\dfrac{1}{x^2-x}$ は
$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{(x-1)x}$$
と変形すると部分分数分解できる。即ち
$$\frac{1}{(x-1)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}$$
という形に変形できる。
$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}=\frac{Ax+B(x-1)}{(x-1)x}$$
なので恒等的に
$$1=(A+B)x-B$$
が成立している。よって $A=1,B=-1$ となり
$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$$
となる。この形にして n 次導関数を予想すればよい。

- 三角関数の場合，積を和に直す方法が考えられる。今の場合は

  $$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

  と単独の形になるが一般には和の形になる。この形にして n 次導関数を予想すればよい。