解析学 I に対する追加説明 $\sharp 2$

- テーラーの定理は次であった。

次を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ であり，これを**剰余項**と呼ぶ。

- 関数 f が何回でも微分可能で，$R_n \to 0\,(n \to \infty)$ が成立するとき，テイラーの定理から

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

が得られる。これを $x = a$ における**テーラー級数**という。

- だから「テーラー級数を求めよ」という問題は,

$$R_n \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{1}$$

を仮定すれば n **次導関数を求める**問題である。

- 条件 (1) が成立するとき，f は $x = a$ で**テーラー級数展開可能**というが，我々は通常このことを仮定する。

- 次の問題を考える

$f(x) = xe^{3x}$ の $x = 1$ におけるテーラー級数を求めよ。

- $x = 1$ におけるテーラー級数は上で $a = 1$ としたものなので,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$$

の形をしている。よって $f^{(k)}(x)$ を求めればよい。

- ライプニッツの定理を用いると計算できるが，ここでは何回か微分して n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ の形を予想することにする。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{3x} + 3xe^{3x} \\
f''(x) &= 6e^{3x} + 3^2 xe^{3x} \\
f^{(3)}(x) &= 3^3 e^{3x} + 3^3 xe^{3x} \\
f^{(4)}(x) &= 3^3 \cdot 4e^{3x} + 3^4 xe^{3x}
\end{aligned}
$$

- これらから一般形が予想できればよいが，できなければ次の様な方法もある。

- 導関数は A, B を定数として

$$
f^{(n)}(x) = Ae^{3x} + Bxe^{3x}
$$

の形をしている。A, B は n によって変わるので，これを $A = a(n), B = b(n)$ と書き直すと，

$$
f^{(n)}(x) = a(n)e^{3x} + b(n)xe^{3x} \tag{2}
$$

となる。

- (2) を x で微分すると

$$
f^{(n+1)}(x) = 3a(n)e^{3x} + b(n)e^{3x} + 3b(n)xe^{3x} \tag{3}
$$

となる。(3) と

$$
f^{(n+1)}(x) = a(n+1)e^{3x} + b(n+1)xe^{3x}
$$

を比較して

$$
a(n+1) = 3a(n) + b(n), \qquad b(n+1) = 3b(n)
$$

を得る。

- $n = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
f(x) = f^{(0)}(x) &= xe^{3x} \\
&= a(0)e^{3x} + b(0)xe^{3x}
\end{aligned}
$$

より $a(0) = 0, b(0) = 1$ である。

- あとは漸化式を解けばよい。$b(n)$ は $b(0)=1, b(n+1)=3b(n)$ なので初項 1 公比 3 の等比数列である。よって $b(n)=3^n$ である。

- $a(n)$ の漸化式は
$$a(n+1)=3a(n)+b(n)=3a(n)+3^n$$
なので両辺を 3^n で割ると
$$\frac{a(n+1)}{3^n}=\frac{a(n)}{3^{n-1}}+1$$
となる。

- $\dfrac{a(n)}{3^{n-1}}$ は初項 $\dfrac{a(0)}{3^{0-1}}=0$ 公差 1 の等差数列なので
$$\frac{a(n)}{3^{n-1}}=n$$
となり $a(n)=3^{n-1}n$ が得られる。即ち
$$f^{(n)}(x)=3^{n-1}ne^{3x}+3^nxe^{3x} \tag{4}$$
が得られる。

- この方法だと式 (4) はすでに証明してあるので，帰納法で証明する必要はない。
しかし，ここでは式 (4) を予想したものとして数学的帰納法で証明しよう。
$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= xe^{3x} \\ &= 3^{0-1}0e^{3x}+3^0xe^{3x} \end{aligned}$$
なので $n=0$ のとき成立している。

- $n=k$ のとき成立することを仮定する。即ち
$$f^{(k)}(x)=3^{k-1}ke^{3x}+3^kxe^{3x}$$
の成立を仮定する。与式を x で微分すると
$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= 3\cdot 3^{k-1}ke^{3xk}+3^ke^{3x}+3\cdot 3^kxe^{3x} \\ &= 3^k(k+1)e^{3x}+3^{k+1}xe^{3x} \\ &= 3^{(k+1)-1}(k+1)e^{3x}+3^{k+1}xe^{3x} \end{aligned}$$
となり，$n=k+1$ でも成立している。

- $f^{(n)}(1) = 3^{n-1}ne^3 + 3^n e^3$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k-1}ke^3 + 3^k e^3}{k!}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k-1}(k+3)e^3}{k!}(x-1)^k \end{aligned}$$

  が得られる。