# 解析学 I に対する追加説明 $\sharp 3$

- 代入法について追加説明する。分母に $(x-a)^2$ があるときは微分を用いると計算の手間を減らせる。

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

を例に考える。

- 部分分数展開可能なので

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{ax+b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

となる実数 $a, b, c, d$ が存在する。通分して分子を比較して

$$3x^2+1 = (ax+b)(x^2+1) + (cx+d)(x-1)^2 \tag{1}$$

をえる。

- 式 (1) に $x = 1$ を代入するだけでは $a, b$ に関する式が 1 つ得られるだけである。$a, b$ を求めるためにはもう 1 つ式が必要である。そのために式 (1) を微分して $x = 1$ を代入する。

- 式 (1) に $x = 1$ を代入すると

$$3 \cdot 1^2 + 1 = (a+b)(1^2+1) + (c \cdot 1 + d)(1-1)^2$$

より

$$a + b = 2 \tag{2}$$

を得る。

- 式 (1) を微分すると

$$6x = a(x^2+1) + (ax+b)2x + c(x-1)^2 + (cx+d) \cdot 2(x-1) \tag{3}$$

が得られる。式 (3) に $x = 1$ を代入すると

$$6 = 2a + 2(a+b) \tag{4}$$

を得る。

- 式 (2)，(4) より $a=1, b=1$ となる。
- 求めた $a, b$ の値を式 (1) に代入すると
$$3x^2+1=(x+1)(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2$$
より
$$-x(x-1)^2=(cx+d)(x-1)^2$$
となり $c=-1, d=0$ となる。
- 以上により有理式は
$$\frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{x+1}{(x-1)^2}-\frac{x}{x^2+1}$$
と部分分数分解される。
- 因数分解は実数の範囲で行うが，代入するときに値は複素数でもかまわない。
$$\frac{x^3+4x+3}{(x^2+1)(x^2+4)}$$
を例にして考える。
- 部分分数展開可能なので
$$\frac{x^3+4x+3}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{x^2+4}$$
となる実数 $a, b, c, d$ が存在する。通分して分子を比較して
$$x^3+4x+3=(ax+b)(x^2+4)+(cx+d)(x^2+1) \tag{5}$$
をえる。
- 式 (5) に $x=i$ (虚数単位) を代入すると
$$i^3+4i+3=(ai+b)(i^2+4)+(ci+d)(i^2+1)$$
より
$$3+3i=3(b+ai)$$
となり，$a=1, b=1$ を得る。

- $c, d$ を得るのに前問と同様に求めた $a, b$ を式 (5) に代入してもよいが，ここでは式 (5) に $x = 2i$ を代入することで求めよう。

$$8i^3 + 8i + 3 = (-4+1)(d+2ci)$$

  より $c = 0, d = -1$ となる。

- 以上により有理式は

$$\frac{x^3+4x+3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

  と部分分数分解される。