解析学 I に対する追加説明 $\sharp 4$

- 積分は実際に計算を実行してみて，その途中で色々方法を考えることが多い。また，1 つの積分を計算するにも色々なことが必要になる。

- $I = \displaystyle\int \frac{1}{a + b\sin x}\,dx$ を例に考える。

- $\sin x$ が分母にあり $\sin x$ の 1 次式なので，他の方法ではできそうもない。とりあえず $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおいて変数変換をする。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(1 + t^2)$$

より $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ である。また

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

より

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{a + b\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{at(1+t^2) + 2bt}\,dt \\ &= \int \frac{2}{at^2 + 2bt + a}\,dt \end{aligned}$$

- 有理関数の積分に帰着できた。分母は 2 次式であるが，積分するためには (実数の範囲で) 因数分解できる場合とできない場合に分ける必要がある。

- 分母の 2 次式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = b^2 - a^2$$

である。最初に因数分解できない場合を考える。

- $b^2 - a^2 < 0$ とする。このときは

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

の形に帰着させればよい。

- 2 次式の 1 次の項が 0 になるように変形する。

$$
\begin{aligned}
at^2 + 2bt + a &= a\left(t^2 + 2\frac{b}{a}t + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right) \\
&= a\left(\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \\
&= \frac{1}{a}\left((at+b)^2 + (a^2 - b^2)\right)
\end{aligned}
$$

となる。

- $A = \sqrt{a^2 - b^2}$, $s = at + b$ とおくと $\dfrac{ds}{dt} = a$ なので

$$
I = a\int \frac{2}{(at+b)^2 + A^2}\,dt = \int \frac{2}{(s^2 + A^2)}\,ds
$$

ここで $s = Au$ とおくと, $\dfrac{ds}{du} = A$ なので

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{2}{A^2u^2 + A^2} A\,du = \frac{2}{A}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{2}{A}\arctan u \\
&= \frac{2}{A}\arctan\left(\frac{at+b}{A}\right) = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan\frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)
\end{aligned}
$$

- $b^2 - a^2 \geq 0$ のときは

$$
at^2 + 2bt + a = a(t-\alpha)(t-\beta)
$$

と因数分解できる。

$$
\frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{t - \beta}
$$

と部分分数分解ができるのは $\alpha \neq \beta$ の場合なので $b^2 - a^2 > 0$ と $b^2 - a^2 = 0$ と 2 つに分ける。

- $b^2 - a^2 = 0$ のときは $\alpha = \beta = -\dfrac{b}{a}$ であり

$$
at^2 + 2bt + a = a(t-\alpha)^2
$$

となるので

$$
I = \int \frac{2}{a(t-\alpha)^2}\,dt = -\frac{2}{a(t-\alpha)} = -\frac{2}{a\tan\frac{x}{2} + b}
$$

- $b^2 - a^2 > 0$ のとき $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
  とおくと
  $$\frac{2}{at^2+2bt+a} = \frac{A}{t-\alpha} + \frac{B}{t-\beta}$$
  と部分分数分解できる。
  $$\begin{aligned}\frac{A}{t-\alpha} + \frac{B}{t-\beta} = \frac{A(t-\alpha)+B(t-\beta)}{(t-\alpha)(t-\beta)} &= \frac{aA(t-\alpha)+aB(t-\beta)}{a(t-\alpha)(t-\beta)} \\ &= \frac{(aA+aB)t-(aA\alpha+aB\beta)}{at^2+2bt+a}\end{aligned}$$
  より $A+B=0, aA\alpha+aB\beta=2$ である。
  $B=-A$ を代入して
  $$aA(\alpha-\beta)=2$$
  を得るが $\alpha - \beta = \dfrac{2\sqrt{b^2-a^2}}{a}$ より
  $$A = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}, \quad B- = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}$$
  $$\begin{aligned}I &= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \int \left(\frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{t-\beta}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \left(\log|t-\alpha| - \log|t-\beta|\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \left(\log\left|\tan\frac{x}{2} + \frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right| - \log\left|\tan\frac{x}{2} + \frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right|\right)\end{aligned}$$