解析学 I に対する追加説明 $\sharp 5$

- 微分方程式についての追加説明する。
- 「微分方程式」と「微分方程式を解く」ことについて混同している人が若干いるので最初にそれを説明する。
- 2 次方程式でいうと
$$ax^2 + bx + c = 0$$
が方程式で
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
が解である。方程式が与えられたとき，解を求めることを「方程式を解く」という
- 微分方程式でいうと，
$$y' = 4y$$
が「微分方程式」で
$$y = Ce^{4x}$$
が「微分方程式の (一般) 解」である。微分方程式が与えられたとき，一般解を求めることを「微分方程式を解く」という。
- 微分法方程式
$$y' = 4y$$
が与えられたとき，演算子を用いて
$$(D - 4)y = 0$$
と書き直すのは，微分方程式を書き直しただけで「解いた」ことにはならない。
- 演算子と関数の区別がついていない人が若干 (多数？) いるようである。

  D は微分演算子で，関数 y をその導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ に移す写像である。$y' = 4y$ という微分方程式は $Dy = 4y$ と書き直し，$Dy - 4y = 0$ と移行し，4 を 4 倍演算子と考え
$$(D - 4)y = 0$$
と書くことができる。

- 定数倍演算子，関数倍演算子は演算子とも定数または関数とも見ることができるので，すこし注意が必要かもしれない。

  $$(D-4)y$$

  と書いてあったとき 4 は演算子と考えるしかないが，

  $$Dy-4y$$

  では 4 は演算子とも考えることができるし，定数の 4 と考えることもできる。どちらの見方をしても違いはない。

- 関数倍も定数倍と同様で

  $$(D-f(x))y$$

  の場合 $f(x)$ は関数倍演算子と考えるしかないが，

  $$Dy-f(x)y$$

  では $f(x)$ は演算子とも考えることができるし，関数 $f(x)$ と考えることもできる。

- 演算子で微分方程式を解くことはスローガン的には

  $$\boxed{\text{微分方程式を解く} \xrightarrow{D-\lambda=e^{\lambda x}De^{-\lambda x}} \text{積分}}$$

  といえる。

- 微分方程式

  $$y'=4y \tag{1}$$

  をこの方法で解く。最初に演算子を用いて (1) を書き直す。

  $$(D-4)y=0 \tag{2}$$

  微分方程式 (2) を書き直すと

  $$e^{4x}De^{-4x}y=0 \tag{3}$$

  である。

- $z = e^{-4x}y$ とおき (3) の両辺に e^{4x} を作用させると

$$Dz = 0 \tag{4}$$

が得られる。

- z を求めるためには積分すればよい。

$$z = \int 0\,dx = C$$

より

$$y = ze^{-4x} = Ce^{4x}$$

- 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$$

を考える。微分演算子 D を用いて

$$(D^2 - 4)y = 0$$

とかく。これを

$$(D-2)(D+2)y = 0 \tag{5}$$

と演算子の積の形にする。$(D+2)y = u$ とおくと微分方程式 (5) は $(D-2)u = 0$ となる。すなわち 2 階の微分方程式 (5) は 1 階の 2 つの微分方程式

$$(D-2)u = 0 \tag{6}$$

$$(D+2)y = u \tag{7}$$

を解くことに帰着できる。

- 微分方程式 (6) は $D - \lambda = e^{\lambda x}De^{-\lambda x}$ を用いると

$$e^{2x}De^{-2x}u = 0$$

即ち $v = e^{-2x}u$ とおくと

$$Dv = 0$$

となり，v の積分を求める問題になる。

- $v = C_1$ なので $u = C_1 e^{2x}$ となり微分方程式 (7) は

  $$(D+2)y = C_1 e^{2x}$$

  となる。$D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$ を用いると $e^{-2x} D e^{2x} y = C_1 e^{2x}$ と変形できる。$z = e^{2x} y$ とおくと，この微分方程式は

  $$Dz = C_1 e^{4x} \tag{8}$$

  となり，z の積分を求める問題になる。

- (8) を積分すると

  $$z = \int Dz\,dx = \int C_1 e^{4x}\,dx = \frac{C_1}{4} e^{4x} + C_2$$

  となるよって

  $$y = e^{-2x} z = \frac{C_1}{4} e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

  が得られる。

- このままでもよいが $\dfrac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 とおき直して

  $$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

  としてもよい。