解析学 I 要綱 $\sharp 7$

2.4 合成関数の導関数

積の微分法は偏微分でも 1 変数と同様であるが合成関数の導関数は 1 変数と異なるので特に注意が必要である。

定理 2.12 [**積の微分法**]

$$(f(x,y)g(x,y))_x = (f(x,y))_x \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot (g(x,y))_x$$
$$(f(x,y)g(x,y))_y = (f(x,y))_y \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot (g(x,y))_y$$

ここで $(f(x,y))_x, (f(x,y))_y$ は $f(x,y)$ を x で，y で偏微分した偏導関数の意味。

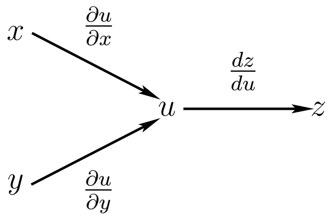
命題 2.13 [**合成関数の微分法 (1)**] $z = z(u), u = u(x,y)$ が微分可能のとき

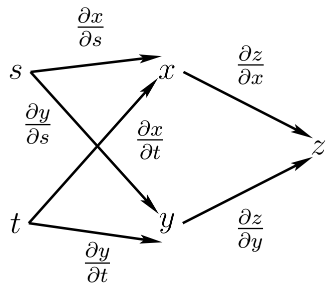
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$

定理 2.14 [**合成関数の微分法 (2)**] $z = z(x,y), x = x(s,t), y = y(s,t)$ は微分可能とする。このとき $z(x(s,t),y(s,t))$ を s で微分した偏導関数および $z(x(s,t),y(s,t))$ を t で微分した偏導関数は次で与えられる。

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

命題 2.13 および定理 2.14 がそれぞれどのような場合に適用されるかは変数間の関係を見ることで分かる。例えば z を s で微分するとき，s から z へ向かうすべての経路を考える。それぞれの経路について，その辺上の導関数をかけ，すべての経路に関して和をとると，求める導関数が得られる。





定理 2.14 は 1 変数の合成関数の導関数の定理とは異なっている。2 変数のとき合成関数の微分はなぜこの形になるのか？ 厳密ではないが「証明」を紹介する。最初に 1 変数の場合の合成関数の導関数の定理の「証明」を復習しよう。

$y = f(x)$ と $z = g(y)$ との合成関数 $z = g \circ f(x)$ を考える。導関数は

$$\frac{dz}{dx}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g \circ f(a+h) - g \circ f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big)}{h}$$

である。$b = f(a)$，$k = f(a+h) - f(a)$ とおくと，$f(a+h) = f(a) + k = b + k$ であり $h \to 0$ のとき $k \to 0$ となるので

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(a+h) - f(a)} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{g(b+k) - g(b)}{k} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \frac{dg}{dy}(b) \frac{df}{dx}(a)
\end{aligned}$$

となる。

2 変数を考える。

$$\Delta = z(x(s+h,t), y(s+h,t)) - z(x(s,t), y(s,t))$$

とおくと $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta}{h}$ である。$\Delta = z(x(s+h,t), y(s+h,t)) - z(x(s,t), y(s+h,t)) + z(x(s,t), y(s+h,t)) - z(x(s,t), y(s,t))$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{h} =& \frac{z(x(s+h,t), y(s+h,t)) - z(x(s,t), y(s+h,t))}{h} \\
&+ \frac{z(x(s,t), y(s+h,t)) - z(x(s,t), y(s,t))}{h} \\
=& \frac{z(x(s+h,t), y(s+h,t)) - z(x(s,t), y(s+h,t))}{x(s+h,t) - x(s,t)} \frac{x(s+h,t) - x(s,t)}{h} \\
&+ \frac{z(x(s,t), y(s+h,t)) - z(x(s,t), y(s,t))}{y(s+h,t) - y(s,t)} \frac{y(s+h,t) - y(s,t)}{h}
\end{aligned}$$

$$H = x(s+h,t) - x(s,t),\ K = y(s+h,t) - y(s,t) \text{ とおくと}$$

$$= \frac{z(x(s,t)+H, y(s+h,t)) - z(x(s,t), y(s+h,t))}{H} \frac{x(s+h,t) - x(s,t)}{h}$$
$$+ \frac{z(x(s,t), y(s,t)+K) - z(x(s,t), y(s,t))}{K} \frac{y(s+h,t) - y(s,t)}{h}$$

ここで $h \to 0$ とすると $H \to 0, K \to 0$ となるので

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

が得られる。

演習問題 2.9　定理 2.12 を示せ。

演習問題 *2.10　命題 2.13 を示せ。

演習問題 *2.11　定理 2.14 を示せ。

$z = z(x,y) = \sin(x^2y^2)\log(x^3+y^3)$ の導関数を求めてみよう。積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} z_x &= \left(\sin\left(x^2y^2\right)\log\left(x^3+y^3\right)\right)_x \\ &= \left(\sin\left(x^2y^2\right)\right)_x \log\left(x^3+y^3\right) + \sin\left(x^2y^2\right)\left(\log\left(x^3+y^3\right)\right)_x \end{aligned}$$

となる。$u = x^2y^2$ とおくと $u_x = 2xy^2$ なので

$$\left(\sin\left(x^2y^2\right)\right)_x = \frac{d}{du}\sin u \cdot u_x = 2xy^2\cos\left(x^2y^2\right)$$

となる。$u = x^3+y^3$ とおくと $u_x = 3x^2$ なので

$$\left(\log\left(x^3+y^3\right)\right)_x = \frac{d}{du}\log u \cdot u_x = \frac{3x^2}{x^3+y^3}$$

となる。よって

$$z_x = 2xy^2\cos\left(x^2y^2\right)\log\left(x^3+y^3\right) + \frac{3x^2\sin\left(x^2y^2\right)}{x^3+y^3}$$

演習問題 2.12　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $z = x^3 - 3xy + y^3$　　(2) $z = (x^3+y^4)^{100}$

(3) $z = \dfrac{x-y}{2x+3y}$　　(4) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

(5) $z = e^{ax^2+by^2}$　　(6) $z = x\arctan\dfrac{x}{y}$

(7) $z = xy\sin(x^2+y^2)$　　　　　(8) $z = x^2y^2\log(x^3+y^3)$

(9) $z = xy\arcsin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　　　　　(10) $z = x^xy^yx^yy^x$

関数 $z=f(x,y)$ の導関数 f_x, f_y が偏微分可能のとき更に導関数を考えることができる。f_x の x に関する導関数 $(f_x)_x$ および y に関する導関数 $(f_x)_y$ をそれぞれ

$$f_{xx}, \quad f_{xy}$$

と書く。また f_y の導関数も同様に定義できる。これらを 2 階の偏導関数 (2 次偏導関数) と呼ぶ。$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ の表し方で言うと，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を x で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ と書く。同様に $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ と書く。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を x で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ と表す。$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を y で微分した関数は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ から $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ と表す。3 階以上の偏導関数も同様に定義される。

$z=f(x,y)$ の 2 階の偏導関数は 4 つあり

$$z_{xx}, \quad z_{xy}, \quad z_{yx}, \quad z_{yy}$$

あるいはライプニッツ流に書くと

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

である。$z=f(x,y)$ の 3 階の偏導関数は 8 つあり

$$z_{xxx}, \quad z_{xxy}, \quad z_{xyx}, \quad z_{xyy}, \quad z_{yxx}, \quad z_{yxy}, \quad z_{yyx}, \quad z_{yyy}$$

あるいはライプニッツ流に書くと

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

である。

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり，この 2 つ

は一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。このことについては後 (2.6 節) で取り上げる。

演習問題 2.13　次の関数について z_s, z_t および $z_{ss}, z_{st}, z_{ts}, z_{tt}$ を求めよ。
(1) $z = \sin x \cos y, x = s^2 - t^2, y = 2st$
(2) $z = \sin(x^2 + y^2), x = s + t, y = st$
(3) $z = \sin(x + 2y), x = \dfrac{t}{s}, y = \dfrac{s}{t}$

　逆関数がでてくる場合は次の形の様に行列で考えた方が分かりやすいかもしれない。

定義 2.15 2 変数関数の組 $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ に対し

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

をこの関数（の組）の**ヤコビ行列**といい，この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \det\left(\frac{D(x,y)}{D(s,t)}\right)$$

で表わし，**ヤコビアン** (**ヤコビ行列式**) という。ヤコビ行列を用いると定理 2.14 は次のように書き直すことができる。

定理 2.16 2 つの関数の組 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ と $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$ に対し

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(s,t)}$$

が成立する。
　特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.14　定理 2.14 から定理 2.16 を導け。

例 2.17 定理 2.16 を用いて導関数を求める。

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad s = x + y, \qquad t = xy$$

とする。合成関数の導関数の定理 (定理 2.14) から

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s$$

となる。z_x, z_y は求めることができるが，x_s, y_s はこのままでは求めることができない。そこで定理 2.16 を用いる。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} = \frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} z_s &= z_x x_s + z_y y_s = 2x\frac{x}{x-y} + 2y\frac{-y}{x-y} \\ &= \frac{2(x-y)(x+y)}{x-y} = 2(x+y) \end{aligned}$$

となる。z_{ss} も求めよう。定理 2.14 において z を z_s にすると

$$z_{ss} = (z_s)_s = (z_s)_x x_s + (z_s)_y y_s$$

が得られる。よって

$$z_{ss} = 2\frac{x}{x-y} + 2\frac{-y}{x-y} = 2$$

が得られる。z_t, z_{tt}, z_{st} も同様に得られる。

演習問題 2.15 次の場合に $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 及び $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = u^2$ (2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$

(3) $x = u\cos v, y = u\sin v$ (4) $x = u, y = u + v$

演習問題 2.16 次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = x + y^2$,$s = x + y, t = xy$ (2) $z = x+y$,$s = x^2+y^2, t = x^2y^2$
(3) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$ (4) $z = x+y, s = x^2-y^2, t = 2xy$
(5) $z = xy, s = x, t = x + y$ (6) $z = xy, s = x\cos y, t = x\sin y$

演習問題 2.17 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする (2 次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\dfrac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$ およびヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算し，関数 $z = f(x, y)$ に対し次を示せ。

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

演習問題 2.18

(1) $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。
  1) $z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$
  2) $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$

(2) $x + y = e^{u+v}$, $x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u$, $y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となることを示せ。

2.5 3 変数関数の微分

今まで 2 変数関数の微分について学んだ。ここでは 3 変数関数について見る。2 変数関数の場合とほとんど平行に議論が進むことが確認出来る。

定義 2.18 関数 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ が $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$ で x_1 に関して**偏微分可能**とは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{h}$$

が収束することを言う。

各点で偏微分可能のとき導関数を考えることができる。これらを x_1 に関する偏導関数と言う。x_1 に関する偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} \quad f_{x_1} \quad z_{x_1}$$

等書かれる。

x_2, x_3 に関しても同様に定義できる。例えば x_2 に関する偏導関数は (x_2 に関し偏微分可能なとき)

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + h, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h}$$

と書ける。

x_1, x_2 及び x_3 に関して偏微分可能のとき，単に**偏微分可能**と言う。

3 変数関数の場合全微分可能性は幾何的には「接空間の存在」を意味する。

定義 2.19 $y = f(x_1, x_2, x_3)$ は点 (a_1, a_2, a_3) のまわりで定義されていて連続とする。定数 A, B, C, D が存在して

$$\begin{aligned}\varepsilon(h_1, h_2, h_3) &= \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \Big\{ f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) \\ &\qquad - \big(A + Bh_1 + Ch_2 + Dh_3\big) \Big\}\end{aligned}$$

とおくとき，

$$\lim_{(h_1, h_2, h_3) \longrightarrow (0,0,0)} \varepsilon(h_1, h_2, h_3) = 0$$

が成立するとする。このとき $f(x_1, x_2, x_3)$ は (a_1, a_2, a_3) で**全微分可能**という。全微分可能を単に**微分可能**という場合もある。

演習問題 2.19 $f(x_1, x_2, x_3)$ が (a_1, a_2, a_3) で全微分可能のとき $f(x_1, x_2, x_3)$ は (a_1, a_2, a_3) で偏微分可能であり，$A = f(a_1, a_2, a_3), B = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3), C = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, a_3), D = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a_1, a_2, a_3)$ となることを示せ。

$$f(a_1, a_2, a_3) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, a_3)h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1, a_2, a_3)h_3$$

が接空間を表す 1 次式であり，この 1 次式により関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ を近似している。

合成関数に関しても 2 変数と同様の結果が成立する。

定理 2.20 $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}$$

定義 2.21 3 変数関数 3 個の組 $x_1 = x_1(t_1, t_2, t_3), x_2 = x_2(t_1, t_2, t_3)$, $x_3 = x_3(t_1, t_2, t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{pmatrix}$$

をこの関数 (の組) の**ヤコビ行列**という。この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \det\left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}\right)$$

で表し，**ヤコビアン**という。

定理 2.22 3 つの関数の組 $x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3)$, $x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3)$, $x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$ と
$u_1 = u_1(t_1, t_2, t_3)$, $u_2 = u_2(t_1, t_2, t_3)$, $u_3 = u_3(t_1, t_2, t_3)$ に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}$$

が成立する。特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u_1, u_2, u_2)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)}\right)^{-1}$$

となる。

演習問題 *2.20　定理 2.20 および定理 2.22 を証明せよ。

演習問題 2.21　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $w = f(x, y, z) = x^2y^3z^4$　(2) $w = xyz\sin(x^2 + y^2 + z^2)$
(3) $w = e^{x^2+y^3+z^4}$　(4) $w = x^2y^3\log(x^2 + y^3 + z^4)$

演習問題 2.22　次の場合に $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ 及び $\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = w^2, z = u^2$
(2) $x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2uw$
(3) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u + w$
(4) $x = u, y = u + v, z = u + v + w$

演習問題 2.23　次の関数に対し $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}$ を求めよ。

(1) $w = x^3 + y^3 + z^3$,$x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$
(2) $w = x + y + z$,$x^2 + y^2 + z^2 = s, xyz = t, xy + yz + zx = u$

演習問題 2.24 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ とする (3 次元の極座標表示)。関数 $w = f(x, y, z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}$