

演習問題 \*\*1.1 定理 1.2 を証明せよ (以下微積分の基礎を厳密に取り扱う演習問題には (\*) を 2 つ付けてある。)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  の定義は

$$\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

である。

与えられた数列は収束しているの以下  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とする。

(1) 1)  $\varepsilon$  を任意の正の実数とする。 $a_n$  について, 任意の  $\varepsilon$  に対して上の定義の様な  $N$  が存在するので, 特に  $\frac{\varepsilon}{2}$  に対してもある  $N_1$  が存在する。即ち  $N_1 \in \mathbb{N}$  で

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。また  $b_n$  についても同様なので,  $N_2 \in \mathbb{N}$  で

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。このとき  $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと ( $\max\{N_1, N_2\}$  は  $N_1$  と  $N_2$  の大きい方,  $N_1 = N_2$  のときはどちらかと思ってもよい),  $n > N$  となる任意の自然数  $n$  に対し  $n > N_1$  かつ  $n > N_2$  が成立するので,

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。途中で三角不等式 ( $|x + y| \leq |x| + |y|$ ) を使用した。

2)  $k = 0$  のとき数列は  $ka_n = 0$  であり, 示すべき式は  $|ka_n - k\alpha| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$  なので成立している。よって  $k \neq 0$  とする。

$\varepsilon$  を任意の正の実数とする。任意の  $\varepsilon$  に対して上の定義の様な自然数が存在するので, 特に  $\frac{\varepsilon}{|k|}$  に対してもある  $N$  が存在する。即ち  $N \in \mathbb{N}$  で

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

を満たすものが存在する。このとき

$$n > N \implies |ka_n - k\alpha| = |k(a_n - \alpha)| = |k| \cdot |a_n - \alpha| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

が成立するので,  $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k\alpha$  が成立する。

3) 最初に, 収束する数列は有界であること, 即ち  $a_n$  が収束するとき,

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M$$

が成立することを示す。任意の  $\varepsilon$  に対し  $N$  が存在するので、特に 1 に対しある自然数  $N$  が存在し  $n > N$  に対し  $|a_n - \alpha| < 1$  が成立する。このとき  $-1 < a_n - \alpha < 1$  であり、 $\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$  が成立する。 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |\alpha + 1|, |\alpha - 1|\}$  とおく。 $n \leq N$  のときは  $|a_n| \leq M$  が成立する。 $n > N$  のときは

$$\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$$

が成立する。いずれの場合も  $|a_n| \leq M$  が成立するので、有界であることが示された。 $a_n$  は  $\alpha$  に収束するので、上に述べた性質をもつ  $M$  が存在する。

定理の証明に戻る。最初に  $\beta = 0$  の場合を考える。 $\varepsilon$  を任意の正数とする。 $b_n$  は 0 に収束するので、ある自然数  $N$  が存在して、任意の  $n$  に対し

$$n > N \implies |b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

が成立する。このとき

$$|a_n b_n - \alpha \beta| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

となるので、この場合は証明された。よって  $\beta \neq 0$  とする。

$\varepsilon$  を任意の正数とする。 $b_n$  は  $\beta$  に収束するので、 $\frac{\varepsilon}{2M}$  に対しある自然数  $N_2$  が存在して

$$n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。また  $\frac{\varepsilon}{2|\beta|}$  に対し自然数  $N_1$  が存在して

$$n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

が成立する。 $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと、 $n > N$  のとき

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha \beta| &= |(a_n b_n - a_n \beta) + (a_n \beta - \alpha \beta)| \\ &\leq |a_n| \cdot |(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)| \cdot |\beta| \\ &\leq M \cdot |(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)| \cdot |\beta| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|\beta|} |\beta| = \varepsilon \end{aligned}$$

となるので証明された。

4)  $\beta \neq 0$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

を示せば、(3) の結果とあわせて (4) が証明される。よってこの命題を証明する。 $\varepsilon$  として  $\frac{|\beta|}{2}$  をとると、ある自然数  $N_1$  が存在して、 $n > N_1$  のとき

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

が成立する。このとき  $-\frac{|\beta|}{2} < b_n - \beta < \frac{|\beta|}{2}$  が成立するので、 $\beta - \frac{|\beta|}{2} < b_n < \beta + \frac{|\beta|}{2}$  が成立する。このことから  $n > N_1$  のとき  $|b_n| > \frac{|\beta|}{2}$  が成立する。また  $b_n$  は  $\beta$  に収束するので、 $\frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$  に対し自然数  $N_2$  が存在して  $n > N_2$  のとき

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。 $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと、 $n > N$  のとき

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} \right| = \left| \frac{\beta - b_n}{\beta b_n} \right| = \frac{|\beta - b_n|}{|\beta| \cdot |b_n|} < \frac{2|\beta - b_n|}{|\beta| \cdot |\beta|} < \frac{2}{|\beta| \cdot |\beta|} \frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

となる。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とし、背理法で証明する。即ち  $\alpha > \beta$  が成立することを仮定する。 $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2}$  とする。収束の定義より

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \varepsilon$$

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$  は

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

と同値なので

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} < a_n < \alpha + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

となる。

$|b_n - \beta| < \varepsilon$  は

$$\beta - \varepsilon < b_n < \beta + \varepsilon$$

より

$$\beta - \frac{\alpha - \beta}{2} < b_n < \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

となる。

$N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと  $n > N$  のとき

$$b_n < \frac{\alpha + \beta}{2} < a_n$$

となるがこれは  $a_n < b_n$  に矛盾する。よって示された。

(3) 任意の正の実数を  $\varepsilon$  とする。 $a_n, c_n$  は  $A$  に収束するので

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N_1 \implies A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N_2 \implies A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

が成立する。 $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと  $n > N$  のとき

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

が成立するので  $b_n$  は  $A$  に収束する。

演習問題 \*\*1.2 定理 1.3 を証明せよ

$\{a_n\}$  を上に有界な単調非減少数列とする。 $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  とおくと集合  $A$  は上に有界である。実数の連続性に関する公理 (ワイエルシュトラスの公理) より  $A$  には上限 (最小上界) が存在する。これを  $\alpha$  とする。 $\alpha$  は上界であるから

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \alpha$$

が成立する。 $\alpha$  は最小上界なので、 $\forall \varepsilon > 0$  に対し  $\alpha - \varepsilon$  は  $A$  の上界ではない。即ち

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \alpha - \varepsilon < a_N$$

が成立する。このとき  $n > N$  である任意の自然数  $n$  に対し  $a_N \leq a_n$  が成立する。よって

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

となる。まとめると

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成立するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  となる。

演習問題 1.3 数列  $\{a_n\}$  が下に有界とは「 $\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq M$ 」と定義し、 $\{a_n\}$  が単調非増加数列であるとは「 $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n$ 」と定義する。定理 1.3 を用いて「下に有界な単調非増加数列は収束する」ことを証明せよ。

$b_n = -a_n$  とおく。 $\{b_n\}$  が上に有界な単調非減少数列であることを示す。 $a_n$  は下に有界なので「 $\exists N \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq N$ 」が成立する。このとき  $M = -N$  とおくと任意の自然数  $n$  に対し

$$b_n = -a_n \leq -N = M$$

となり  $b_n$  は上に有界である。また  $a_n$  は単調減少数列なので任意の自然数  $n$  に対し

$$a_{n+1} \leq a_n$$

が成立している。このとき

$$b_{n+1} = -a_{n+1} \geq -a_n = b_n$$

となるので、 $b_n$  は単調増加数列である。定理 1.3 より  $b_n$  は収束する。 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$  とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -B$$

となるので  $a_n$  も収束する。

演習問題 1.4 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$  で帰納的に定義される数列とする。

- (1) 任意の自然数  $n$  に対し  $a_{n+1} - a_n \geq 0$  が成立することを数学的帰納法で示せ。
- (2) 任意の自然数  $n$  に対し  $a_n \leq 2$  が成立することを示せ。

(1)  $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 1 = 1$  なので  $a_{1+1} - a_1 = 1 - 0 = 1 \geq 0$  であり,  $n = 1$  のとき命題は成立している。 $n = k$  のとき成立を仮定する, 即ち  $a_{k+1} - a_k \geq 0$  の成立を仮定する。このとき  $a_{k+2} = \frac{1}{2}a_{k+1} + 1, a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + 1$  なので

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_{k+1} &= \left( \frac{1}{2}a_{k+1} + 1 \right) - \left( \frac{1}{2}a_k + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

となる。 $a_{k+1} - a_k \geq 0$  なので  $a_{k+2} - a_{k+1} \geq 0$  が成立する。 $n = k + 1$  のときも命題が成立しているので, 数学的帰納法により示された。

(2)  $a_1 = 0 \leq 2$  なので  $n = 1$  のとき成立している。(1)の結果より  $a_n$  は単調増加なので, 任意の自然数  $n$  に対し  $a_n \geq 0$  である。 $n = k$  のとき成立を仮定する, 即ち  $a_k \leq 2$  の成立を仮定する。このとき

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + 1 \leq \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

なので  $n = k + 1$  のときも成立する。

**演習問題 1.5** 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n - 1$  で帰納的に定義される数列とすると,  $a_n = 1 - 2^{n-1}$  が成立することを示せ。

$$1 - 2^{1-1} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = a_1$$

なので  $n = 1$  のとき  $a_n = 1 - 2^{n-1}$  は成立している。

$n = k$  のとき成立を仮定する, 即ち  $a_k = 1 - 2^{k-1}$  の成立を仮定する。

$$a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2(1 - 2^{k-1}) - 1 = 1 - 2^k = 1 - 2^{(k+1)-1}$$

となるので  $n = k + 1$  のときも成立している。

**演習問題 \*\*1.6** 定理 1.5 を証明せよ。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  の定義は

$$\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R} \exists \delta (> 0) \in \mathbb{R} \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立することである。

以下  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  とする。

(1) 1)  $\varepsilon > 0$  を任意の正数とする。ある正数  $\delta_1$  が存在して, 任意の  $x$  に対し

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。またある正数  $\delta_2$  が存在して, 任意の  $x$  に対し

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。このとき  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  とおく。ここで  $\min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  は  $\delta_1$  と  $\delta_2$  の小さい方、 $\delta_1 = \delta_2$  のときはどちらを思ってもよい。

$0 < |x - a| < \delta$  のとき  $0 < |x - a| < \delta_1$  および  $0 < |x - a| < \delta_2$  が成立するので

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (A + B)| &= |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \\ &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる。

2)  $k = 0$  の場合は  $kf(x)$  は恒等的に 0 なので成立している。よって  $k \neq 0$  とする。任意の正数  $\varepsilon$  に対して上の様な  $\delta$  が存在するので、特に  $\frac{\varepsilon}{|k|}$  に対し  $\delta > 0$  が存在して  $0 < |x - a| < \delta$  ならば  $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{|k|}$  を満たす。このとき

$$|kf(x) - kA| = |k(f(x) - A)| = |k| \cdot |f(x) - A| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

となるので証明された。

3) 1 に対しある正数  $\delta_0$  が存在し、任意の  $x$  に対し

$$0 < |x - a| < \delta_0 \implies |f(x) - A| < 1$$

が成立している。このとき  $M = \max \{ |A + 1|, |A - 1| \}$  とおくと  $0 < |x - a| < \delta_0$  のとき  $|f(x)| \leq M$  が成立する。

最初に  $B = 0$  の場合を考える。 $\varepsilon$  を任意の正数とする。ある正数  $\delta_1$  が存在して任意の  $x$  に対し  $0 < |x - a| < \delta_1 \implies |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$  が成立する。 $\delta = \min \{ \delta_0, \delta_1 \}$  とおくと、任意の  $x$  に対し  $0 < |x - a| < \delta$  のとき

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \\ &< M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。この場合は証明された。

よって  $B \neq 0$  とする。 $\varepsilon$  を任意の正数とする。ある正数  $\delta_1$  が存在して任意の  $x$  に対し

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$$

が成立する。またある正数  $\delta_2$  が存在して任意の  $x$  に対し

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。 $\delta = \min \{ \delta_0, \delta_1, \delta_2 \}$  とおく。 $0 < |x - a| < \delta$  となる  $x$  に対し

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)B| + |f(x)B - AB| \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - B| + |f(x) - A| \cdot |B| \end{aligned}$$

$$< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|B|} |B| = \varepsilon$$

となり、この場合も成立する。

4) 数列のときと同様に  $B \neq 0$  のとき

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

を示せば、3) と組み合わせて 4) が証明される。

$\varepsilon$  として  $\frac{|B|}{2}$  をとると、正数  $\delta_1$  が存在して、 $0 < |x - a| < \delta_1$  のとき、

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$$

が成立する。このとき  $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$  が成立する。

$g(x)$  は  $B$  に収束するので、任意の  $\varepsilon$  に対してある正数  $\delta_2$  が存在して、 $0 < |x - a| < \delta_2$  となる任意の  $x$  に対し

$$|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2} \varepsilon$$

が成立する。このとき  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  とおくと  $0 < |x - a| < \delta$  となる任意の  $x$  に対し

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| &= \left| \frac{B - g(x)}{g(x)B} \right| = \frac{|B - g(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} \\ &< \frac{2|B - g(x)|}{|B|^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。

(2) 結論が成立しないと仮定すると、 $A > B$  が成立している。 $\varepsilon = \frac{A - B}{2}$  とおくと  $\varepsilon > 0$  なので  $\delta_1 > 0$  が存在して

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |f(x) - A| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \\ &\implies A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \\ &\implies A - \frac{A - B}{2} < f(x) < A + \frac{A - B}{2} \\ &\implies \frac{A + B}{2} < f(x) < A + \frac{A - B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき  $\frac{A + B}{2} < f(x)$  が成立している。

また  $\delta_2 > 0$  が存在して

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - B| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |g(x) - B| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < g(x) - B < \varepsilon \\ &\implies B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(x) < B + \frac{A - B}{2} \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(x) < \frac{A + B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき  $g(x) < \frac{A + B}{2}$  が成立している。 $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  とおくと  $0 < |x - a| < \delta$  となる  $x$  に対し

$$g(x) < \frac{A + B}{2} < f(x)$$

が成立する。これは矛盾，よって結論が正しいことが示される。

(3) 任意の正数  $\varepsilon$  に対し，ある  $\delta_1$  が存在して

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。またある正数  $\delta_2$  が存在して

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |h(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。 $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  とおくと  $x$  が  $0 < |x - a| < \delta$  を満たすとき

$$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$$

が成立するので  $|g(x) - A| < \varepsilon$  が成立する。よって  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$  である。