解析学 I 問題解説 $\sharp 4$

河野

演習問題 1.16　ライプニッツの定理を数学的帰納法で証明せよ。

2 項係数に関して

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

が成立することは既知としてよい。

$f(x), g(x)$ を f, g と書く。$\binom{1}{0}=1$, $\binom{1}{1}=1$ なので

$$(fg)'=f'g+fg'=\binom{1}{0}f'g+\binom{1}{1}fg'$$

より $n=1$ のとき成立している。n のとき成立を仮定する。即ち

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$$

の成立を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f\cdot g) &= \left(\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g)\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k)}g^{(k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left(f^{(n-k)}\right)'g^{(k)}+f^{(n-k)}\left(g^{(k)}\right)'\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k+1)}g^{(k)}+f^{(n-k)}g^{(k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n-k+1)}g^{(k)} \\
&= \binom{n}{0}f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\binom{n}{n}f^{(0)}g^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{0}f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\binom{n+1}{n+1}f^{(0)}g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}
\end{aligned}$$

となり $n+1$ のときも成立する。

成立を前提とした 2 項係数の等式の証明を述べておく。

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}+\frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)(n-k)!} \\
&= \frac{kn!}{k!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

演習問題 1.17　次の関数の n 次導関数を求めよ。(問題では「数学的帰納法で示す」ことを要求されてないので，数学的帰納法で証明しなくてもよいが，それを要求されたときはできるようにしておくこと。)

(1) $f(x) = x^3 e^x$　　(2) $f(x) = x^3 \log x$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$　　(4) $f(x) = \log(x+1)$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$　　(6) $f(x) = \sin x$

(7) $f(x) = \sin x \cos x$　　(8) $f(x) = x^4$

問題では帰納法で証明することは要求されていないが，解説しておく。

(1)　ライプニッツの定理

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

を用いる。$f(x)$ は関数に用いられているので，定理の $f(x)$ を $g(x)$ に $g(x)$ を $h(x)$ に変更して，$g(x) = e^x$，$h(x) = x^3$ とすると，$h'(x) = 3x^2$，$h''(x) = 6x$，$h^{(3)}(x) = 6$，$h^{(k)}(x) = 0$ $(k \geq 4)$ および $g^{(n)}(x) = e^x$ である。よって

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} g^{(n)}(x)h(x) + \binom{n}{1} g^{(n-1)}(x)h^{(1)}(x) + \binom{n}{2} g^{(n-2)}(x)h^{(2)}(x) + \binom{n}{3} g^{(n-3)}(x)h^{(3)}(x) \\
&= e^x x^3 + ne^x 3x^2 + \frac{n(n-1)}{2} e^x 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} e^x 6 \\
&= \left(x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right) e^x
\end{aligned}$$

となる。

(2)　ライプニッツの定理を用いてもよいが，何回か微分してみる。$f'(x) = 3x^2 \log x + x^2$，$f''(x) = 6x \log x + 5x$，$f^{(3)}(x) = 6 \log x + 11$，$f^{(4)}(x) = \dfrac{6}{x}$ となる。4 次以上の導関数について $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ を用いると，次が得られる。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 \log x + x^2 \\
f''(x) &= 6x \log x + 5x \\
f^{(3)}(x) &= 6 \log x + 11 \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n 6(n-4)! \frac{1}{x^{n-3}} \quad (n \geq 4)
\end{aligned}$$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ を数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のときは

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-2} = (-1)^1 1! x^{-(1+1)}$$

より成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k)}=(-1)^k k! x^{-(k+1)}$ の成立を仮定する。両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)^{(k+1)} &= \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}\right)' = \left((-1)^k k! x^{-(k+1)}\right)' \\ &= -(-1)^k k!(k+1)x^{-(k+1)-1} = (-1)^{k+1}(k+1)! x^{-((k+1)+1)}\end{aligned}$$

となるので $n=k+1$ でも成立している。

(3)　$f(x)=(x+1)^{-1}$ なので $f'(x)=-(x+1)^{-2}$, $f''(x)=2(x+1)^{-3}$, $f'''(x)=-6(x+1)^{-4}=-3!(x+1)^{-4}$ となるので $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}$ と予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。

　$n=1$ のときは $f'(x)=-(x+1)^{-2}=(-1)^1 1!(x+1)^{-(1+1)}$ なので予想は正しい。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k k!(x+1)^{-(k+1)}$$

を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k k!(x+1)^{-(k+1)}\right)' \\ &= (-1)^k k!(-(k+1))(x+1)^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)!(x+1)^{-((k+1)+1)}\end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも予想が正しいことがわかる。

(4)　$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$f''(x)=-(x+1)^{-2}$，$f^{(3)}(x)=2(x+1)^{-3}$，$f^{(4)}(x)=-6(x+1)^{-4}$ なので

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}$$

と予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。

　$n=1$ のとき

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}=(-1)^{1+1}(1-1)!(x+1)^{-1}$$

なので予想は正しい。$n=k$ のとき予想が正しいと仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}(k-1)!(x+1)^{-k}$ の成立を仮定する。このとき $f^{(k)}(x)$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= \left((-1)^{k+1}(k-1)!(x+1)^{-k}\right)' \\ &= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(x+1)^{-k-1} \\ &= (-1)^{(k+1)+1}((k+1)-1)!(x+1)^{-(k+1)}\end{aligned}$$

となるので $k+1$ のときも成立する。

(5)　部分分数分解して

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

とできるので

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! \frac{1}{x^{n+1}} + (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}}$$

と予想される。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' \\ &= x^{-2} - (x-1)^{-2} \\ &= (-1)^2 1! \frac{1}{x^{1+1}} + (-1)^1 1! \frac{1}{(x-1)^{1+1}} \end{aligned}$$

なので成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} k! \frac{1}{x^{k+1}} + (-1)^k k! \frac{1}{(x-1)^{k+1}}$$

の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= (-1)^{k+1} k! \left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)' + (-1)^k k! \left(\frac{1}{(x-1)^{k+1}}\right)' \\ &= (-1)^{k+1} k! \frac{-(k+1)}{x^{k+2}} + (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(x-1)^{k+2}} \\ &= (-1)^{k+1+1} (k+1)! \frac{1}{x^{(k+1)+1}} + (-1)^{k+1} (k+1)! \frac{1}{(x-1)^{(k+1)+1}} \end{aligned}$$

となる。よって $k+1$ のときも成立している。

(6)　$f'(x) = \cos x$，$f''(x) = -\sin x$，$f^{(3)}(x) = -\cos x$，$f^{(4)}(x) = \sin x$ より

$$f^{(4m)}(x) = \sin x, \quad f^{(4m+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4m+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4m+3)}(x) = -\cos x$$

となる。場合分けによらない書き方もある。$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ となる。2 階以上も同様に $f''(x) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), f^{(3)} = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$ となる。一般に

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

とも表すことができる。

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ が成立することを数学的帰納法で示す。$n = 0$ のとき

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \sin x = \sin\left(x + \frac{0\pi}{2}\right)$$

より成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。両辺を x で微分すると

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right)'$$

$$= \sin\left(\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

となる。よって $n=k+1$ でも成立している。

(7)　$\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ となる。前問の結果 $[(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)]$ より

$$(\sin 2x)^{(n)} = 2^n \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

と予想できる。

$n=1$ のとき

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $(\sin 2x)^{(k)} = 2^k\sin\left(2x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。

$$\begin{aligned}(\sin 2x)^{(k+1)} &= \left((\sin 2x)^{(k)}\right)' = \left(2^k\sin\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)' \\ &= 2^k\cdot 2\sin\left(2x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2^{k+1}\sin\left(2x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

なので $n=k+1$ のときも成立する。よって

$$(\sin x\cos x)^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

である。

(8)　$f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, $f^{(3)}(x)=24x$, $f^{(4)}(x)=24$, $f^{(5)}(x)=0$, $f^{(n)}(x)=0\ (n\geq 6)$ となる。この書き方でもよいが，少し「格好つける」なら順列の記号 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = {}_4P_n x^{4-n}$$

としてもよい。

演習問題 1.18　$a\neq x$ のとき $c=a+\theta(x-a)$ とする。次を示せ。

$$0<\theta<1 \iff \begin{cases} a<c<x & (a<x\text{ のとき}) \\ x<c<a & (x<a\text{ のとき})\end{cases}$$

$0<\theta<1$ とする。$a<x$ の場合は $x-a>0$ なので 3 辺にかけると

$$0<\theta(x-a)<x-a \tag{1}$$

となる。(1) の 3 辺に a を加えると

$$a<a+\theta(x-a)<a+x-a=x$$

が得られる。

$x<a$ のときは $x-a<0$ なので $0<\theta<1$ に $x-a$ をかけると符号が変わり

$$0>\theta(x-a)>x-a \tag{2}$$

となる。(2) の 3 辺に a を加えると

$$a>a+\theta(x-a)>a+x-a=x$$

が得られる。

演習問題 1.19　定理 1.27 の (1), (2) の 2) の場合を証明せよ。

$f^{(n)}$ 連続かつ $f^{(n)}(a)<0$ なので a を含むある区間 $(a-\delta,a+\delta)$ において $f^{(n)}(x)<0$ となる。この区間内の x についてテーラーの定理を適用すると $f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ なので $f(x)=f(a)+\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ となる。(1) 即ち n が偶数の場合 $x\neq a$ ならば $(x-a)^n>0$ なので，$f(x)-f(a)<0$ 即ち $f(x)<f(a)$ となる。よって f は $x=a$ で極大である。(2) 即ち n が奇数の場合 $x>a$ なら $(x-a)^n>0$，$x-a<0$ ならば $(x-a)^n<0$ である。よって $x>a$ ならば $f(x)<f(a)$，$x<a$ ならば $f(x)>f(a)$ となっている。

演習問題 1.20　$f(x)=e^x$ を $a=0,n=6$ としてテーラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい

$f(x)=e^x$ とすると $f^{(n)}(x)=e^x$ なので

$$f(x)=\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k!}x^k+R_6 \qquad (R_6=\frac{e^c}{6!}x^6)$$

となる。ここで c は $x>0$ なら $0<c<x$，$x<0$ なら $x<c<0$ を満たす。$g(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k!}x^k$ とすると $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{e}} &\fallingdotseq g\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(-\frac{1}{2}\right)^5\\ &=\frac{2329}{3840}=0.606510416\end{aligned}$$

となる。$-\dfrac{1}{2}<c<0$ なので $0<e^c<e^0=1$ となる。よって誤差は

$$|\Delta|=|R_6|=\left|\frac{e^c}{6!}\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right|<\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{46080}=2.170138888888889\times10^{-5}$$

と評価できる。

剰余項 R_n は

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n\right| = \frac{e^c}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-10}$$

を満たしていればよい。不等式を計算すると $n!\cdot 2^n > 10^{10}$ となる。$n=11$ のとき

$$11!\cdot 2^{11} = 81749606400 > 10^{10}$$

となるので $g_{10}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{k!}x^k$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \fallingdotseq g_{10}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2253801941}{3715891200} = 0.60653051978486$$

演習問題 1.21　$f(x) = \cos x$ を $a=0, n=6$ としてテーラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。

更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい。

$f(x) = \cos x$ とおくと $f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x, f^{(5)}(x) = -\sin x, f^{(6)}(x) = -\cos x$ なので $f(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 1, f^{(6)}(0) = -1, f'(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = 0$ となる。

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + R_6 \qquad \left(R_6 = \frac{-\cos c}{6!}x^6\right)$$

$g(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4$ とおくと $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ の近似値は

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \fallingdotseq g\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0.9510578492071949$$

となる。$f^{(6)}(x) = -\cos x$ なので $\left|f^{(6)}(c)\right| \leq 1$ となっている。よって誤差は

$$|\Delta| = \left|\frac{-\cos c}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6\right| \leq \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < \frac{1}{6!}\left(\frac{4}{10}\right)^6 = 5.688889\times 10^{-6}$$

と評価できる。

$f^{(n)}(x)$ は $\pm\cos x, \pm\sin x$ のいずれかなので $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$ が成立する。剰余項 R_n は

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n\right| \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^n < \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-10}$$

を満たしていればよい。不等式は $n!\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^n > 10^{10}$ となる。$n=10$ のとき

$$10!\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{10} = \frac{138427734375}{4} = 3.460693359375\times 10^{10} > 10^{10}$$

となるので $g_9(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4-\dfrac{1}{6!}x^6+\dfrac{1}{8!}x^8$ とおくと

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\fallingdotseq g_9\left(\frac{\pi}{10}\right)=0.9510565162977323$$

演習問題 1.22　次の関数の $a=0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。(1)–(5) のテーラー級数は $-1<x<1$ の範囲で，(8) のテーラー級数は $-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ の範囲で考える。なお一般の実数 α と自然数 n に対し

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\quad(n\geq 1),\qquad \binom{\alpha}{0}=1$$

と定義する。これは α が自然数の場合の 2 項係数の拡張になっている。

(1) $f(x)=\log(1+x)$　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x)=\sqrt{1+x}$　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　　(6) $f(x)=e^{2x}$

(7) $f(x)=\sin 3x$　　(8) $f(x)=\log(2x+3)$

(1)　$f(x)=\log(1+x)$ に対して，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$，$f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$ となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x)\quad=\quad f'(x)=\frac{1}{1+x}=(-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\right)'\\
&=(-1)^{k+1}(k-1)!\frac{-k}{(1+x)^{k+1}}\\
&=(-1)^{(k+1)+1}\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}\\
&=(-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}
\end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+0)^k} = (-1)^{k+1}(k-1)!$ (この式は $k=0$ のとき成立しないことに注意！), および $f(0) = \log(1+0) = \log 1 = 0$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k+1}(k-1)! x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k \end{aligned}$$

となる。$\sum$ を用いず

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k + \cdots$$

という書き方でもよい。

数学的帰納法の形式だけを書いて実際は何も証明していない，間違った証明をする人がいる。この問題の数学的帰納法の部分の間違った「証明」を次に書く。間違いを見つけられない人は，理解している友達か私に質問して下さい。

n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。
(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \quad = \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。n に $k+1$ を代入すると

$$f^{(k+1)}(x) \quad = \quad (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，$f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$，$f'''(x) = \dfrac{6}{(1-x)^4}$ となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ と予想される。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \;=\; \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right)' \\ &= k!\frac{-(k+1)(-1)}{(1-x)^{k+2}} \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

が成立する。
　0 以上の整数 k に対し $f^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{(1-0)^{k+1}} = k!$，が成立するので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k! x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \end{aligned}$$

となる。

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

という書き方でもよい。
(3)　$f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}$，$f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-2}$，
$f'''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\left(\dfrac{1}{2}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-3}$，となる。$n$ 次導関数は

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= n!\binom{\frac{1}{2}}{n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

と予想される。
(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \;=\; \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} = 1!\binom{\frac{1}{2}}{1}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x)=k!\binom{\frac{1}{2}}{k}(1+x)^{\frac{1}{2}-k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{2}-k}\right)' \\ &= k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{1}{2}-k\right)\left((1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)}\right) \end{aligned}$$

となるが

$$\begin{aligned} k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{1}{2}-k\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\left(\frac{1}{2}-k\right) \\ &= (k+1)!\frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdots\frac{\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k}\frac{\left(\frac{1}{2}-(k+1)+1\right)}{k+1} \\ &= (k+1)!\binom{\frac{1}{2}}{k+1} \end{aligned}$$

となるので

$$f^{(k+1)}(x)=(k+1)!\binom{\frac{1}{2}}{k+1}\left((1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)}\right)$$

が得られ，$k+1$ のときも成立している。よって自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x)=n!\binom{\frac{1}{2}}{n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

が成立する。
$f^{(k)}(0)=k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\quad(k\geq 1)$，$f(0)=1$ なので $f^{(k)}(0)=k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\quad(k\geq 0)$ となる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}k!\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k \end{aligned}$$

となる。
(4)　n 次導関数を計算してもできるが，ここでは異なる方法で求めてみる。 x を $-1<x<1$ を満たす実数とする。初項 1 公比 $-x$ の等比数列の和を考えると

$$\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n$$

が成立する。ここで $n\to\infty$ とすると $(-x)^n\to 0$ なので

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^x + \cdots$$

となる。

(5)　n 次導関数を求めなくても，$f^{(n)}(0)$ が求まればよいことに注目する。

$$f(x)(1+x^2) = 1$$

と変形して両辺を n 回微分する。$1+x^2$ は 3 回以上微分すると 0 になることに注意するとライプニッツの定理より

$$f^{(n)}(x)(1+x^2) + {}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}(x)2x + {}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-2)}(x)2 = 0$$

となる。$x=0$ を代入することにより，$f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ を得る。$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=2$ より

$$f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$$

が成立することが予想される。

　まず奇数の場合を証明する。即ち「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(2n-1)}(0) = 0$」を示す。

(a) $n=1$ のとき；$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ なので $f'(0)=0$ となり，成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する;即ち $f^{(2k-1)}(0)=0$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$ が成立しているので，$n-2=2k-1$ とすると

$$f^{(2k+1)}(0) + (2k+1)2kf^{(2k-1)}(0) = 0$$

が得られる。よって $f^{(2(k+1)-1)}(0) = f^{(2k+1)}(0) = 0$ となり，$k+1$ のときも成立している。

　次に偶数の場合を証明する。即ち「0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$」を示す。

(a) $n=0$ のとき；$f^{(0)}(0) = f(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = (-1)^0(2\cdot 0)!$ なので成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(0) = (-1)^k(2k)!$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$ が成立しているので，$n-2=2k$ とすると

$$f^{(2k+2)}(0) + (2k+2)(2k+1)f^{(2k)}(0) = 0$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} f^{(2(k+1))}(0) &= -(2k+2)(2k+1)f^{(2k)}(0) \\ &= -(2k+2)(2k+1)(-1)^k(2k)! \\ &= (-1)^{k+1}(2(k+1))! \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立している。

　よって

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(0) x^{2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k (2k)! x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}
\end{aligned}
$$

を得る。

別の方法：(4) の

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

の x に x^2 を代入して

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

を得る。

(6)　$f'(x) = 2e^{2x}, f''(x) = 4e^{2x} = 2^2 e^{2x}$ より $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$ と予想できる。これを数学的帰納法で証明する。

$n = 0$ のときは

$$f^{(0)}(x) = e^{2x} = 2^0 e^{2x}$$

なので成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ の成立を仮定する。この式の両辺を微分すると

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(2^k e^{2x}\right)' = 2^{k+1} e^{2x}$$

となり $n = k+1$ のときも成立している。よって証明された。

$f^{(k)}(0) = 2^k e^{2 \cdot 0} = 2^k$ より

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$$

(7)　$f'(x) = 3\cos 3x = 3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f''(x) = 9\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 9\sin\left(3x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$ なので $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

$n = 0$ のときは

$$f^{(0)}(x) = \sin 3x = 3^0 \sin\left(3x + \frac{0\pi}{2}\right)$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=3^k\sin\left(3x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。両辺を微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(3^k\sin\left(3x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'\\&=3^{k+1}\cos\left(3x+\frac{k\pi}{2}\right)=3^{k+1}\sin\left(3x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも成立している。よって証明された。

n が偶数のとき $n=2k$ とおくと

$$f^{(n)}(0)=3^{2k}\sin\left(3\cdot 0+\frac{2k\pi}{2}\right)=3^{2k}\sin(k\pi)=0$$

となる。n が奇数のとき $n=2k+1$ とおくと

$$f^{(n)}(0)=3^{2k+1}\sin\left(3\cdot 0+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)=3^{2k+1}\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=3^{2k+1}(-1)^k$$

となる。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k3^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

(8)　$f'(x)=2(2x+3)^{-1}$, $f''(x)=-4(2x+3)^{-2}$, $f^{(3)}(x)=8\cdot 2(2x+3)^{-3}$ $f^{(4)}(x)=-16\cdot 6(2x+3)^{-4}$ より $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}2^n(n-1)!\,(2x+3)^{-n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

$n=1$ のときは

$$f^{(1)}(x)=2(2x+3)^{-1}=(-1)^12^1(1-1)!\,(2x+3)^{-1}$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}2^k(k-1)!\,(2x+3)^{-k}$ を仮定する。両辺を微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^{k+1}2^k(k-1)!\,(2x+3)^{-k}\right)'\\&=(-1)^{k+1}2^k(k-1)!2\cdot(-k)(2x+3)^{-k-1}=(-1)^{k+2}2^{k+1}\big((k+1)-1\big)!\,(2x+3)^{-(k+1)}\end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも成立している。よって証明された。

$k\geq 1$ のとき $f^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}2^k(k-1)!(2\cdot 0+3)^{-k}=(-1)^{k+1}(k-1)!\dfrac{2^k}{3^k}$ であり，$k=0$ のとき $f^{(0)}(0)=f(0)=\log(2\cdot 0+3)=\log 3$ となる。

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^n=f^{(0)}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^n\\&=\log 3+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(k-1)!\frac{2^k}{3^k}\frac{1}{k!}x^k\\&=\log 3+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^k}{3^kk}x^k\end{aligned}$$

$$f(x) = a_0 + a_(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

とテーラー展開されているときには $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ である。n 次導関数を求めなくとも何らかの方法で求めてもよい。

例えば，演習問題 1.22 (2) では等比数列の和から求めることもできる。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

が得られているとき，この式の x に $-x$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)}\\ &= 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots\\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots\end{aligned}$$

となり (4) を得る。更にこの式に x^2 を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+(x^2)}\\ &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} \cdots\end{aligned}$$

となり (5) を得るがこれはすでに紹介してある。

演習問題 1.23　次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。(3)，(8) の級数は $0 < x < 2$ の範囲で，(9) の級数は $0 < x < 4$ の範囲で考える。

(1) $f(x) = e^x \quad (a = 1)$　　(2) $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$

(3) $f(x) = \log x \quad (a = 1)$　　(4) $f(x) = e^{3x} \quad (a = 2)$

(5) $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$　　(6) $f(x) = \sin x \quad \left(a = \dfrac{\pi}{2}\right)$

(7) $f(x) = \cos 2x \quad \left(a = \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(8) $f(x) = x^2 \log x \quad (x = 1)$

(9) $f(x) = x^3 \log x \quad (x = 2)$

(1)　$f(x) = e^x$ とおくと，$f'(x) = e^x$ である。よって何回微分しても

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

となる。そこまでやる必要はないかもしれないが，一応数学的帰納法でこの事実を確認しておく。示すべき命題は「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x) = e^x$」である。

(a) $n = 1$ のとき $f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)} = e^x$ を仮定する。このとき

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= \left(f^k(x)\right)'\\ &= (e^x)' = e^x\end{aligned}$$

よってテーラー級数は

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k \end{aligned}$$

となる。
(2)　$f(x)=\sin x$ とおくと $f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，$f'''(x)=-\cos x$，$f^{(4)}(x)=\sin x$ となり，以下周期 4 で同じものが続く。よって

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n \sin x, \qquad f^{(2n-1)}(x)=(-1)^{n+1}\cos x$$

と予想される。

まず偶数の場合を証明する。即ち「0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(x)=(-1)^n \sin x$」を示す。
(a) $n=0$ のとき； $f^{(0)}(x)=f(x)=\sin x=(-1)^0 \sin x$ なので成立している。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(x)=(-1)^k \sin x$ を仮定する。

$$\begin{aligned} f^{2(k+1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k)}(x)\right)'\right)' \\ &= \left(\left((-1)^k \sin x\right)'\right)' = \left((-1)^k \cos x\right)' \\ &= (-1)^k\left(-\sin x\right) \\ &= (-1)^{k+1} \sin x \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立している。

次に奇数の場合を証明する。即ち「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(2n-1)}(x)=(-1)^{n+1}\cos x$」を示す。
(a) $n=1$ のとき； $f'(x)=(\sin x)'=\cos x=(-1)^{1+1}\cos x$ なので成立している。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k-1)}(x)=(-1)^{k+1}\cos x$ を仮定する。

$$\begin{aligned} f^{(2(k+1)-1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k-1)}(x)\right)'\right)' \\ &= \left(\left((-1)^{k+1} \cos x\right)'\right)' = \left((-1)^{k+1}(-\sin x)\right)' \\ &= (-1)^{k+1}\left(-\cos x\right) \\ &= (-1)^{(k+1)+1} \cos x \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立している。$f^{(2k)}(\pi)=(-1)^k \sin \pi=0$，$f^{(2k-1)}(\pi)=(-1)^{k+1}\cos \pi=$

$(-1)^{k+1}(-1) = (-1)^k$，なので

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\pi)(x-\pi)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(\pi)(x-\pi)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} (-1)^k (x-\pi)^{2k-1}
\end{aligned}$$

を得る。

(3)　$f(x) = \log x$ に対しては，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$，$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$，$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$，となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n = 1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{x^1}$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \dfrac{(k-1)!}{x^k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)! \frac{-k}{x^{k+1}} \\
&= (-1)^{(k+1)+1} \frac{((k+1)-1)!}{x^{k+1}}
\end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} \dfrac{(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k+1}(k-1)!$，および $f(1) = \log 1 = 0$ なので

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k \\
&= f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k+1}(k-1)!(x-1)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} (x-1)^k
\end{aligned}$$

となる。
(4)　$f'(x)=3e^{3x}$, $f''(x)=3^2e^{3x}$ より $f^{(n)}(x)=3^ne^{3x}$ と予想できる。これを数学的帰納法で証明する。
　$n=0$ のとき
$$f^{(0)}(x)=e^{3x}=3^0e^{3x}$$
より成立している。$n=k$ のとき，即ち $f^{(k)}(x)=3^ke^{3x}$ の成立を仮定する。両辺を微分すると
$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(3^ke^{3x}\right)'=3^k\cdot 3e^{3x}=3^{k+1}e^{3x}$$
となるので，$n=k+1$ のときも成立している。よって証明された。$f^{(k)}(2)=3^ke^{3\cdot 2}=3^ke^6$ なので
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^ke^6}{k!}(x-2)^k$$

(5)　導関数を求めてもよいが，多項式なので
$$\begin{aligned}x^5&=\Big((x-1)+1\Big)^5\\&=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5\end{aligned}$$
と 2 項展開してもよい。
(6)　$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f''(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{2}\right)$ なので
$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。
　$n=0$ のときは
$$f^{(0)}(x)=\sin x=\sin\left(x+\frac{0\pi}{2}\right)$$
なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。両辺を微分すると
$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'\\&=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\end{aligned}$$
となり $n=k+1$ のときも成立している。よって証明された。
　n が偶数のとき $n=2k$ とおくと
$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k$$
となる。n が奇数のとき $n=2k+1$ とおくと
$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)=\sin\left((k+1)\pi\right)=0$$

となる。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}
\end{aligned}
$$

(7)　$f'(x) = -2\sin 2x = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，$f''(x) = -4\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(2x+\frac{2\pi}{2}\right)$ なので $f^{(n)}(x) = 2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

$n=0$ のときは

$$
f^{(0)}(x) = \cos 2x = \cos\left(2x+\frac{0\pi}{2}\right)
$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = 2^k\cos\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)$ を仮定する。両辺を微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(2^k\cos\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)' \\
&= 2^k(-2)\sin\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right) = 2^{k+1}\cos\left(2x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となり $n=k+1$ のときも成立している。よって証明された。

$$
f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^n\cos\left(2\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right) = 2^n\cos\left(\pi+\frac{n\pi}{2}\right)
$$

n が偶数のとき $n=2k$ とおくと

$$
f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^{2k}\cos\left(\pi+\frac{2k\pi}{2}\right) = 2^{2k}\cos(\pi+k\pi) = 2^{2k}(-1)^{k+1}
$$

となる。n が奇数のとき $n=2k+1$ とおくと

$$
f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^{2k+1}\cos\left(\pi+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 2^{2k+1}\cos\left(\pi+k\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 0
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^{2k}}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}
\end{aligned}
$$

(8)　$f'(x) = 2x\log x + x$，$f''(x) = 2\log x + 3$，$f^{(3)}(x) = 2x^{-1}$，$f^{(4)}(x) = -2x^{-2}$ なので $n \geq 3$ に対し $f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n+1}(n-3)!x^{-(k-2)}$ と予想される。

$n=3$ のときは

$$f^{(3)}(x)=2x^{-1}=2(-1)^{3+1}(3-3)!x^{-(3-2)}$$

で成立している。$n=k\geq 3$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}=2(-1)^{k+1}(k-3)!x^{-(k-2)}$ を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'&=2(-1)^{k+1}(k-3)!\,(-(k-2))\,x^{-(k-2)-1}\\&=2(-1)^{(k+1)+1}\,((k+1)-3)!x^{-(k+1)-2}\end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも成立している。

$f(1)=0$，$f'(1)=1$，$f''(1)=3$ であり $k\geq 3$ に対しては $f^{(k)}(1)=2(-1)^{k+1}(k-3)!$ となっている。求める級数は

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k\\&=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k\\&=(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(k-3)!}{k!}2(-1)^{k+1}(x-1)^k\\&=(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k(k-1)(k-2)}(x-1)^k\end{aligned}$$

である。

(9)　$f'(x)=3x^2\log x+x^2$，$f''(x)=6x\log x+5x$，$f^{(3)}(x)=6\log x+11$，$f^{(4)}(x)=6x^{-1}$，$f^{(5)}(x)=6(-1)x^{-2}$ なので $n\geq 4$ に対し $f^{(n)}(x)=6(-1)^n(n-4)!x^{-(k-3)}$ と予想される。

$n=4$ のときは

$$f^{(4)}(x)=6x^{-1}=6(-1)^4(4-4)!x^{-(4-3)}$$

で成立している。$n=k\geq 4$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}=6(-1)^k(k-4)!x^{-(k-3)}$ を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'&=6(-1)^k(k-4)!\,(-(k-3))\,x^{-(k-3)-1}\\&=6(-1)^{(k+1)}\,((k+1)-4)!x^{-(k+1)-3}\end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも成立している。

$f(2)=8\log 2$，$f'(2)=(12\log 2+4)$，$f''(2)=(12\log 2+10)$，$f''(2)=(6\log 2+11)$ であり

$k \geq 4$ に対しては $f^{(k)}(2) = 6(-1)^k (k-4)! 2^{-(k-3)}$ となっている。求める級数は

$$
\begin{aligned}
f(x) =& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k \\
=& f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{f''(3)}{6}(x-2)^3 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-2)^k \\
=& 8\log 2 + (12\log 2 + 4)(x-2) + (6\log 2 + 5)(x-1)^2 \\
& \qquad + \frac{6\log 2 + 11}{6}(x-2)^3 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(k-4)!}{k!} 6(-1)^k 2^{-(k-3)}(x-2)^k \\
=& 8\log 2 + (12\log 2 + 4)(x-2) + (6\log 2 + 5)(x-1)^2 \\
& \qquad + \frac{6\log 2 + 11}{6}(x-2)^3 + \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \frac{6}{k(k-1)(k-2)(k-3)2^{k-3}}(x-2)^k
\end{aligned}
$$

である。

演習問題 ***1.24**　次を示せ。$1 \leq p \leq n$ を満たす実数 p に対し

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n
$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。$R_n = \dfrac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$ を**ロシュの剰余項**と呼ぶ。$p = n$ とすると定理 1.25 の剰余項になる。これを**ラグランジェの剰余項**という。$p = 1$ としたものを**コーシーの剰余項**と呼ぶ。

定理 1.25 の証明と少し異なるがほぼ平行に議論が進む。

$$
A = \frac{(n-1)!}{(x-a)^p}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)
$$

$$
F(t) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + A\frac{(x-t)^p}{(n-1)!}\right)
$$

とおくと $F(x) = f(x) - f(x) = 0$,

$$
F(a) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)\right) = 0
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) =& -\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + A\frac{(x-t)^p}{(n-1)!}\right)' \\
=& -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right) + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^{k} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= \left(Ap - f^{(n)}(t)(x-t)^{n-p}\right)\frac{(x-t)^{p-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

$F'(a+\theta(x-a)) = 0$ となる θ $(0<\theta<1)$ が存在するので

$$
Ap - f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-(a+\theta(x-a)))^{n-p} = 0
$$

より結論が得られる。

演習問題 ***1.25**　次の関数がテーラー級数展開可能であること，即ち剰余項 R_n に対し $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ が成立することを示せ。最初の 3 つの式は任意の x について成立するが，最後の 2 つには制限がつく。

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \cdots \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}x^k = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + \cdots \quad (-1<x<1) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \quad (-1<x<1)
\end{aligned}
$$

ここではすでにそれぞれの関数の n 次導関数は既知とする。即ち

$$
\begin{aligned}
(e^x)^{(n)} &= e^x \\
(\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
(\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
(\log x)^{(n)} &= (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n} \\
((1+x)^\alpha)^{(n)} &= n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}
$$

は既知とする。また前期の極限の所で扱った

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

も既知とする。本問では $a=0$ におけるテーラー展開なので剰余項は

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

である。

$f(x)=e^x$ のとき，$f(x)$ は単調増加なので $|f^{(n)}(\theta x)|=|e^{\theta x}|\leq e^{|x|}$ が成立するので

$$|R_n|\leq\frac{e^{|x|}|x|^n}{n!}$$

となり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}|x|^n}{n!}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となる。

$f(x)=\sin x$ のとき $|f^{(n)}(\theta x)|=\left|\sin\left(\theta x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right|\leq 1$ なので

$$|R_n|\leq\frac{|x|^n}{n!}$$

となり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となる。

$f(x)=\cos x$ のとき $|f^{(n)}(\theta x)|=\left|\cos\left(\theta x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right|\leq 1$ なので

$$|R_n|\leq\frac{|x|^n}{n!}$$

となり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となる。

$f(x)=\log(1+x)$ のとき剰余項としてコーシーの剰余項を採用する。今 $a=0$ なので

$$\begin{aligned}R_n&=\frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}x^n\\&=\frac{(1-\theta)^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{(\theta x+1)^n(n-1)!}x^n\end{aligned}$$

である。$0<\theta<1,-1<x<1$ より $-\theta<\theta x<\theta$ であり，辺々に 1 を加えて $0<1-\theta<1+\theta x$ を得る。よって

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$$

となる。また $1+\theta x>1-|x|>0$ なので

$$\begin{aligned}|R_n|&=\left|\frac{(1-\theta)^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{(\theta x+1)^n(n-1)!}x^n\right|\\&=\frac{|x|^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}<\frac{|x|^n}{1+\theta x}<\frac{|x|^n}{1-|x|}\end{aligned}$$

となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$ となる。

$f(x) = (1+x)^\alpha$ のときも剰余項としてコーシーの剰余項を採用する。今 $a = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} x^n \\
&= \frac{(1-\theta)^{n-1} n! \binom{\alpha}{n} (1+\theta x)^{\alpha - n}}{(n-1)!} x^n \\
&= n \binom{\alpha}{n} x^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} (1+\theta x)^{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

である。$\alpha \geq 1$ のとき $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq (1+|x|)^{\alpha-1}$ であり，$\alpha < 1$ のとき $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq (1-|x|)^{\alpha-1}$ のなのでいずれの場合も θ に関係のない定数 M で $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq M$ とできる。また全問と同様に $0 < \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ が成立するので，

$$
|R_n| \leq n \binom{\alpha}{n} |x|^n
$$

となる。$c_n = n\binom{\alpha}{n}|x|^n$ と置くとき $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ が示されれば証明が終わる。ここで後で証明するが，次の結果を使う。

$\{ c_n \}$ に対し $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = c$ が存在して $0 \leq c < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ である。

$$
\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\alpha - n}{n} |x|
$$

なので $0 \leq \lim_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = |x| < 1$ となる。

最後に途中で使った結果を示す。$c < 1$ なので $\varepsilon = \dfrac{1-c}{2}$ に対しある自然数 N が存在して任意の自然数 n に対し

$$
n > N \implies \left| \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} - c \right| < \varepsilon
$$

が成立する。このとき $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} - c < \varepsilon$ より $|c_{n+1}| < (c+\varepsilon)|c_n|$ となる。$d = c + \varepsilon$ とおくと $0 < d < 1$ であり $|c_{n+1}| < d|c_n|$ が成立している。よって $n > N$ となる n に対し $|c_n| < d^{n-N}|c_N|$ が成立するので $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ となる。

演習問題 ***1.26**　次の関数は何回でも微分可能であるが，$x = 0$ でテーラー級数展開可能でないことを次にしたがって示せ。

$$
f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}
$$

(1) $g(t)$ を n 次の多項式とするとき $\lim_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{e^t} = 0$ が成立することを n に関する数学的帰納法で示せ ($n = 0$ から始めること)。

(2) $f^{(n)}(x)$ はある多項式 $P_n(t)$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

と表されることを n に関する数学的帰納法で示せ ($n = 0$ から始めること)。
(3) $f(x)$ が $x = 0$ でテーラー級数展開可能だと仮定すると矛盾することを示せ。

(1)　$n = 0$ のとき 0 次式は定数なので $g(t) = a$ とする。$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{a}{e^t} = 0$ なので成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち k 次式 $g(t)$ に関しては $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{e^t} = 0$ が成立していることを仮定する。$g(t)$ を任意の $k+1$ 次式とする。ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{g'(t)}{(e^t)'} = \lim_{t\to\infty} \frac{g'(t)}{e^t}$$

となるが $g'(t)$ は k 次式なので $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{g'(t)}{e^t} = 0$ である。よって $k+1$ のときも成立し，数学的帰納法により 0 以上のすべての整数で成立する。
(2)　$n = 0$ のときは $f^{(0)}(x) = f(x)$ なので $P_0(t) = 1$ とおくと成立している。

$n = k$ での成立を仮定する。$x > 0$ では $f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ となっているので，$x > 0$ のときは

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}\right)' = P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} + P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(-P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

となるので $P_{k+1}(t) = t^2\left(-P_k'(t) + P_k(t)\right)$ とおくと $f^{(k+1)}(x) = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ となっている。
$x < 0$ のときは $f^{(k)}(x) = 0$ なので $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = 0$ である。
$x = 0$ のとき

$$\begin{aligned} f_+^{(k+1)}(0) &= \lim_{h\to+0} \frac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{f^{(k)}(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} P_k\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h}} \qquad (\text{ここで } t = \frac{1}{h} \text{ とおく}) \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{tP_k(t)}{e^t} \end{aligned}$$

となるが $tP_k(t)$ は多項式なので極限値は 0 になる。一方

$$f_-^{(k+1)}(0) = \lim_{h\to-0} \frac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h\to-0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

となるので $f^{(k+1)}(0) = f_+^{(k+1)}(0) = f_-^{(k+1)}(0) = 0$ となる。以上で $k+1$ のときの成立が示されたので，数学的帰納法により 0 以上の整数で成立する。

(3)　(2) で示したことからすべての 0 以上の整数 n に対し $f^{(n)}(0)=0$ が成立している。$f(x)$ が $x=0$ でテーラー級数展開可能だと仮定すると

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{0}{k!}x^k=0$$

となり恒等的に 0 になるが $f(x)$ はそうでないので矛盾。よってテーラー級数展開可能ではない。

演習問題 1.27　テーラー級数を用いて次の極限値を求めよ。それぞれの関数のテーラー級数は既知としてよい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

(1)

$$\begin{aligned}\sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\\ \cos x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}x\cos x &= x-\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{4!}x^5-\cdots\\ \sin x - x\cos x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots-\left(x-\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{4!}x^5-\cdots\right)\\ &= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots\\ \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} &= \frac{1}{3}-\frac{1}{30}x^2+\cdots\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$$

である。

(2)

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

なので

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}x+\frac{1}{4!}x^2+\cdots$$

$x\to\infty$ のとき第 1 項，第 2 項は $\to 0$ だが，第 4 項以降はすべて $\to\infty$ で，各項の和なので

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$$

(3)

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\
e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \\
\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} &= \frac{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots - \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots} \\
&= \frac{2x + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots} = \frac{2 + \frac{2}{3!}x^2 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \cdots}
\end{aligned}$$

なので

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} = 2$$

(4)

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}x^2 + \cdots$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}x^2 + \cdots\right)}{x} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}x + \cdots
\end{aligned}$$

なので

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

(5)

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

より

$$\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \cdots$$

なので

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(6)

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$$

より

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{120}\frac{1}{x^5} - \cdots$$

なので

$$x\sin\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{6}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{120}\frac{1}{x^4} - \cdots$$

となる。よって

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$$