解析学 I 演習問題解説 $\sharp 5$

河野

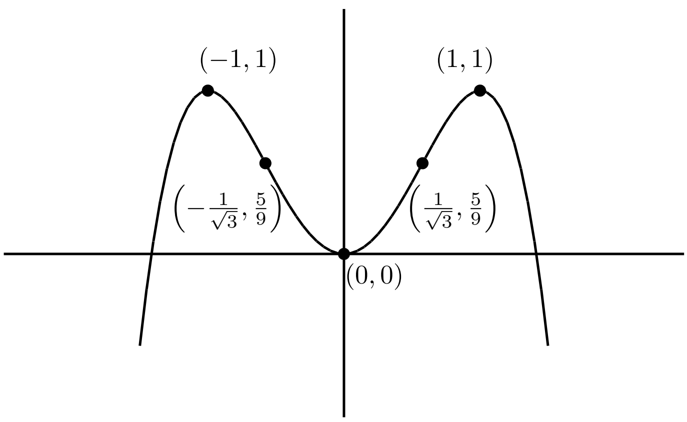
演習問題 1.28 次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$
(2) $f(x) = xe^{-x}$
(3) $f(x) = x^2 \log x$
(4) $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$
(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$
(6) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$
(7) $f(x) = x + 2\cos x$
(8) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$
(9) $f(x) = x^{-x^2}$
(10) $y = (x-5)^4(x+1)^3$
(11) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$
(12) $y = e^{-x^2}$
(13) $y = x \log x$

(1) $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2) = 4x(1-x)(1+x)$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1, 0, 1$ である。$f''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1-3x^2)$ なので $f''(x) = 0$ となるのは $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。増減表は次の様になる。

x		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{5}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{9}$	$\nearrow$	1	$\searrow$

$f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$ を解くと $x = 0, \pm\sqrt{2}$ となる。よって曲線は x 軸と 3 点で交わっている。($x = 0$ は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図の様になる。

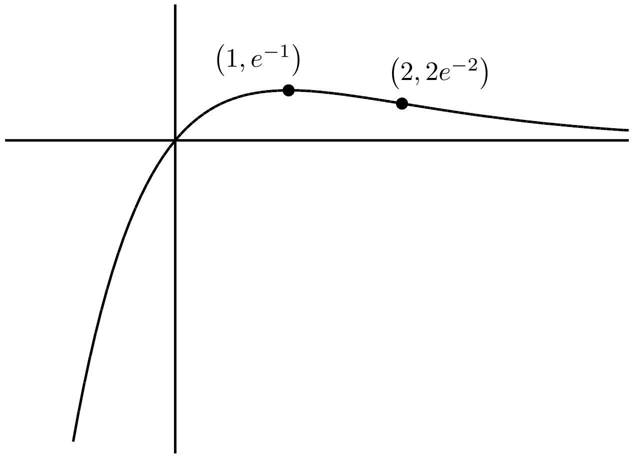


(2) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x}$ なので $f''(x) = 0$ となるのは $x = 2$ のときである。増

減表は次の様になる。

x		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$

$f(x)=xe^{-x}=0$ のとき $x=0$ また $f(0)=0$ なので x 軸, y 軸との交点は原点のみ。$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ということに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(3)　$\log x$ が定義されるのは $x>0$ なので $f(x)$ の定義域も $x>0$ である。$f'(x)=2x\log x+x^2\dfrac{1}{x}=x\left(2\log x+1\right)=0$ を解いて，$x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ を得る。$f''(x)=2\log x+2+1=2\log x+3$ なので $f''(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$ である。よって増減表は次の様になる。

x		$\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2e^3}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2e}$	$\nearrow$

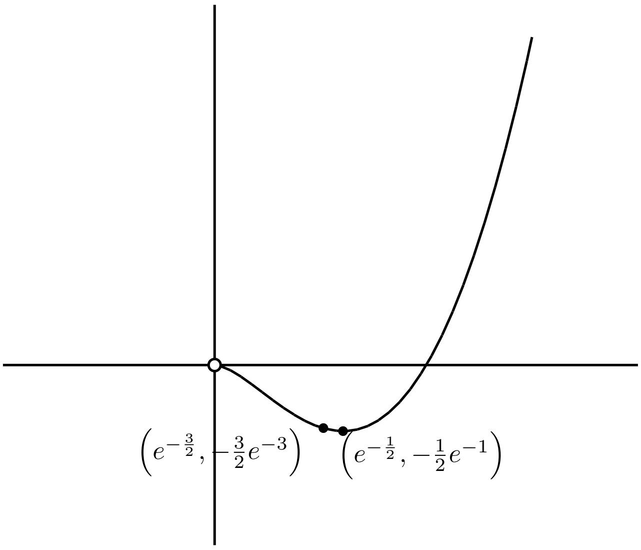
$x\to+0$ としたときの関数の挙動を調べる。ここでロピタルの定理を用いる。

$$\lim_{x\to+0} x^2\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+0} x^2 = 0$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であり，また $f(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。

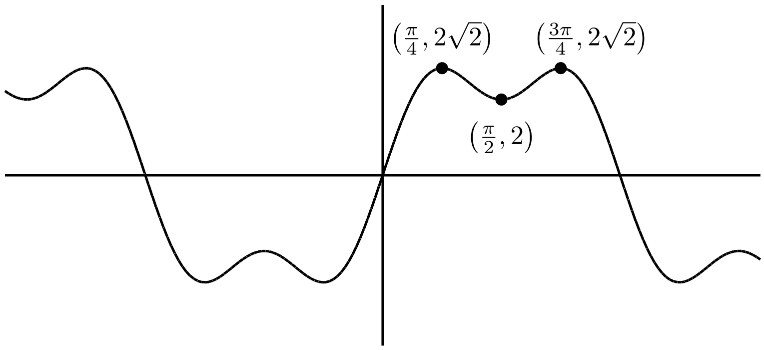


(4)　$\sin x$ は周期 2π の周期関数であり，$\sin 3x$ は周期 $\dfrac{2\pi}{3}$ の周期関数である。これより $f(x)$ は周期 2π の周期関数になる。また $f(-x) = -f(x)$ が成立する。よって $0 \leq x \leq \pi$ の範囲でグラフを描き，それを原点を中心に対象移動したグラフを描く。この $-\pi \leq x \leq \pi$ のグラフを x 軸の方向へ $2n\pi$(n は整数) 平行移動したグラフ全体が求めるグラフとなる。よって $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で調べる。

$f'(x) = 3\cos x + 3\cos 3x = 3\cos x + 3(4\cos^3 x - 3\cos x) = 6\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right)$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $\cos x = 0$ または $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ なので，$0 \leq x \leq \pi$ の範囲では $x = \dfrac{1}{4}\pi, \dfrac{1}{2}\pi, \dfrac{3}{4}\pi$ である。$f''(x) = -3\sin x - 9\sin 3x = -6\sin x(5 - 6\sin^2 x)$ なので $f''(x) = 0$ となるのは $\sin x = 0$ または $\sin^2 x = \dfrac{5}{6}$ である。$\sin^2 x = \dfrac{5}{6}$ となる x の値は正確に求めることはできないが，$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin x = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$ となる x を α，$\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ の範囲で $\sin x = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$ となる x を β とすると，$\sqrt{\dfrac{1}{2}} < \sqrt{\dfrac{5}{6}} < 1$ より $\dfrac{1}{4}\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{3}{4}\pi$ となっている。

よって増減表とグラフは次の様になる。

x	0		$\frac{1}{4}\pi$		α		$\frac{1}{2}\pi$		β		$\frac{3}{4}\pi$		π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	↘	$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$	↘	2	↗	$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$	↗	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	↘	0



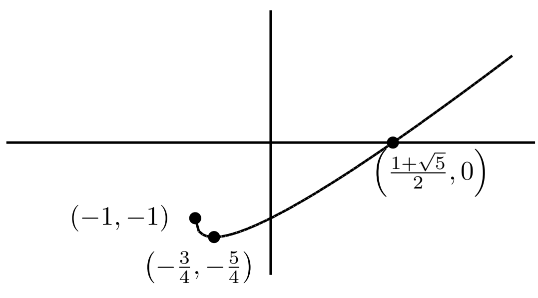
(5)　$f(x) = x - \sqrt{1+x}$ は $1+x \geq 0$ で定義されている。$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = -\dfrac{3}{4}$ である。$f''(x) = \dfrac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$ より $f''(x) = 0$ となることはない。よって増減表は次の様になる。

x		$-\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

$f(x) = 0$ とすると $x - \sqrt{1+x} = 0$ より $x = \sqrt{1+x}$ となる。両辺を 2 乗して

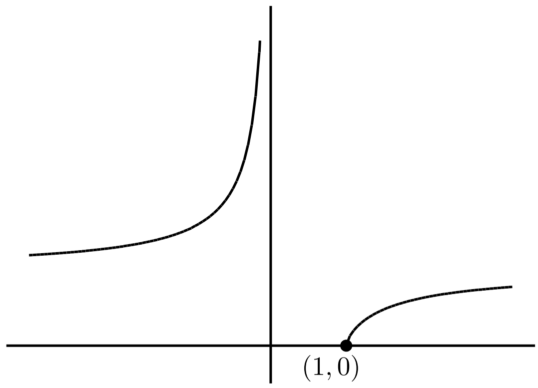
$$x^2 = 1 + x$$

を得る。この 2 次方程式の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。しかし $x = \sqrt{1+x} \geq 0$ より $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ は不適である。また $f(0) = 0 - \sqrt{1+0} = -1$ である。以上のことに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(6)　$f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ なので $1 - \dfrac{1}{x} \geq 0$ が必要である。$x \geq 0$ のときは $1 \geq \dfrac{1}{x}$ より $x \geq 1$ である。$x < 0$ のときは常に $1 - \dfrac{1}{x} \geq 0$ である。$f'(x) = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x^2}$ は $x = 1$ においては微分可能ではない。それ以外では $f'(x) > 0$ である。

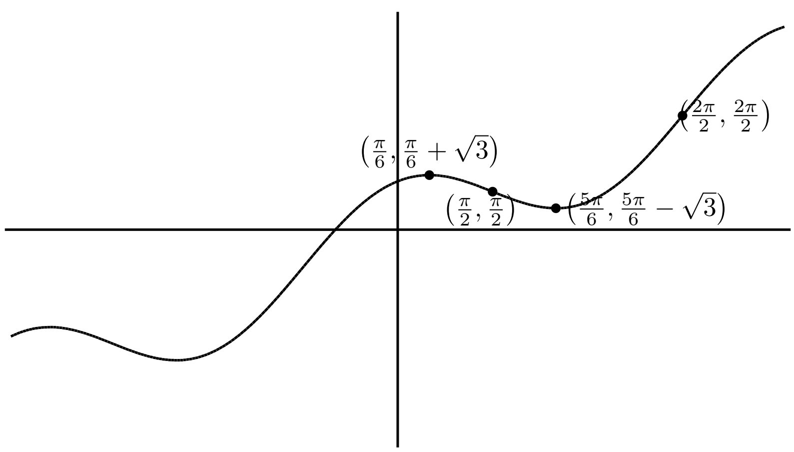
$$f''(x) = -\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{x^4} - \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3} = -\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{x^4}(6x-5)$$ より $x<0$ のとき $f''(x)>0$ であり，$x>1$ のとき $f''(x)<0$ となる。$\displaystyle\lim_{h\to -0} f(x)=\infty$ ということに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(7)　$f(x)=x+2\cos x$ なので $f(x+2\pi)=f(x)+2\pi$ が成立する。$0\leq x\leq 2\pi$ でグラフを描いて，そのグラフを x 軸方向に $2n\pi$，y 軸方向に $2n\pi$ 移動したもの全体が関数のグラフになる (ここで n は整数)。$f'(x)=1-2\sin x$ なので，$f'(x)=0$ となるのは $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$ である。$f''(x)=-2\cos x$ なので $f''(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ である。

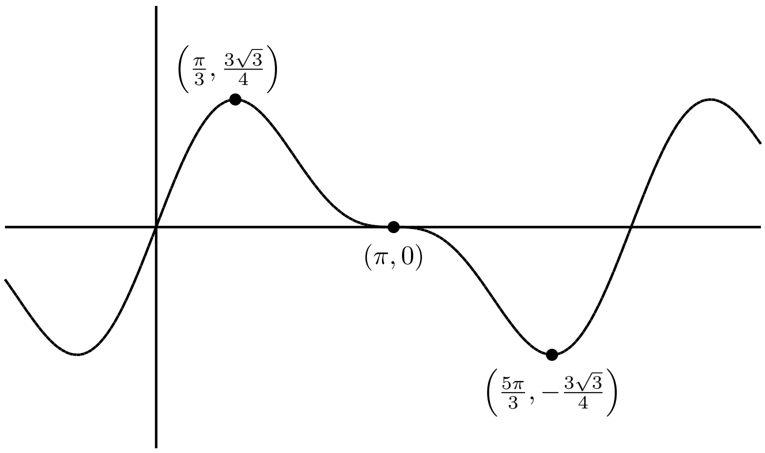
増減表とグラフは次の様になる。

x		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗



(8)　$f(x)$ は周期 2π の周期関数なので $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で考える。$f'(x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x = \cos + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$ である。$f'(x) = 0$ のとき $\cos x + 1 = 0$ または $2\cos x - 1 = 0$ なので，$\cos x + 1 = 0$ のとき $x = \pi$ であり，$2\cos x - 1 = 0$ のとき $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$ である。$f''(x) = -\sin x(1 + 4\cos x)$ なので $f''(x) = 0$ とすると $\sin x = 0$ または $1 + 4\cos x = 0$ である。$\sin x = 0$ のとき $x = 0, \pi, 2\pi$ となる。$1 + 4\cos x = 0$ のときは，$0 \leq x \leq \pi$ で $\cos x = -\dfrac{1}{4}$ となる x を α，$\pi \leq x \leq 2\pi$ で $\cos x = -\dfrac{1}{4}$ となる x を β とすると $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \pi < \beta < \dfrac{5\pi}{3}$ となる。増減表およびはグラフ次の様になる。

x	0		$\frac{\pi}{3}$		α		π		β		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{15}}{16}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{15}}{16}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0



(9)　この問題で凹凸も含めきちんと議論するのは難しい様です。凹凸の議論の部分は青で書いておきますので，興味のある人は参考にしてください。 $f(x) = x^{-x^2}$ なので定義域は $x > 0$ である。導関数を求めるのに対数微分法を用いる。$y = x^{-x^2}$ とすると $\log y = -x^2 \log x$ である。両辺を x で微分すると $\dfrac{1}{y}y' = -2x\log x - x^2\dfrac{1}{x} = -2x\log x - 1$ なので $y' = -x \cdot x^{-x^2}\left(2\log x + 1\right)$ となる。$f'(x) = 0$ とすると，$2\log x + 1 = 0$ なので $x = e^{-\frac{1}{2}}$ となる。

$f''(x) = x^{-x^2}\left(x^2\left(2\log x + 1\right)^2 - \left(2\log x + 1\right) - 2\right)$ となるが，$f''(x) = 0$ を満たす x は 2 つあり，それを α, β とするとき，$\alpha < e^{-1/2} < \beta$ となっていることを示す。$f''(x)$ の正負を判定するために，$g(x) = x^2\left(2\log x + 1\right)^2 - (2\log x + 1) - 2$ とおいて，$g(x)$ の正負を判定する。$u = 2\log x + 1$ とおくと $x = e^{(u-1)/2}$ なので $g(x)$ を u で書き直すと

$$g(x) = e^{u-1}u^2 - u - 2$$

となる。$h(u) = e^{u-1}u^2 - u - 2$ とおく。$x : 0 \to \infty$ のとき，$u : -\infty \to \infty$ となる。$h'(u) = e^{u-1}(u^2 + 2u) - 1$，$h''(u) = e^{u-1}(u^2 + 4u + 2)$ である。$h''(u) = 0$ のとき $u = -2 \pm \sqrt{2}$ となる。

$u < -2-\sqrt{2}$ のとき $h''(u) < 0$，$-2-\sqrt{2} < u < -2\sqrt{2}$ のとき $h''(u) > 0$，$-2+\sqrt{2} < u$ のとき $h''(u) > 0$ である。よって $h'(u)$ は $u < -2-\sqrt{2}$ のとき増加の状態にあり，$-2-\sqrt{2} < u < -2\sqrt{2}$ のとき減少の状態にあり，$-2+\sqrt{2} < u$ のとき増加の状態にある。$h'(-2) < 0$，$h'(0) < 0$，$-2 < -2+\sqrt{2} < 0$ より $h'(-2+\sqrt{2}) < 0$ が分かる。また

$$
\begin{aligned}
h'(-2-\sqrt{2}) &= e^{-2-\sqrt{2}-1}(2+2\sqrt{2}) - 1 \\
&= \frac{2(1+\sqrt{2})}{e^{3+\sqrt{2}}} - 1 < \frac{2(1+\sqrt{2})}{e^{3}} - 1 \\
&= \frac{2}{e}\frac{1+\sqrt{2}}{e}\frac{1}{e} - 1 \\
&< \frac{1}{e} - 1 < 0
\end{aligned}
$$

となるので，ある実数 γ が存在して $u < \gamma$ のとき $h'(u) < 0$，$u > \gamma$ のとき $h'(u) > 0$ となっている。よって $h(u)$ は $u < \gamma$ で単調減少，$u > \gamma$ で単調増加である。$\lim_{u\to\infty} h(u) = \infty$，$\lim_{u\to\infty} h(u) = \infty$，$h(0) = -2$ となるので，実数 α', β' が存在して，$\alpha' < 0 < \beta'$ かつ $u < \alpha'$ のとき $h(u) > 0$，$\alpha' < u < \beta'$ のとき $h(u) < 0$，$\beta' < u$ のとき $h(u) > 0$ となっている。$\alpha = e^{(\alpha'-1)/2}$，$\beta = e^{(\beta'-1)/2}$ とおくと $\alpha < \dfrac{1}{\sqrt{e}} < \beta$ であり，$x < \alpha$ のとき $g(x) > 0$，$\alpha < x < \beta$ のとき $g(x) < 0$，$\beta < x$ のとき $g(x) > 0$ となる。

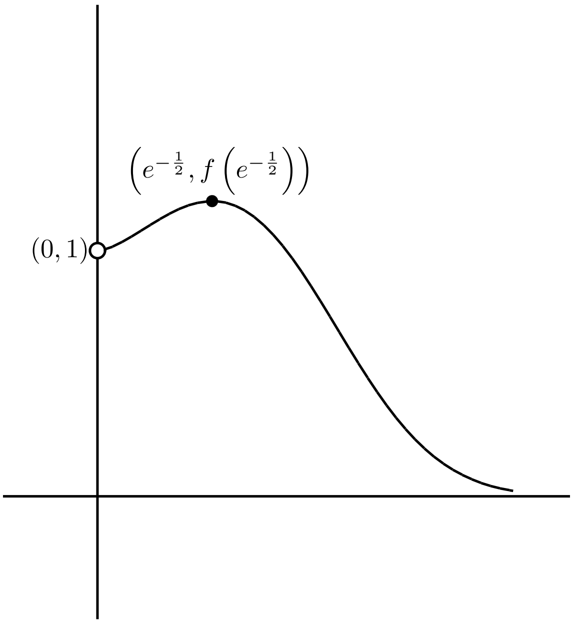
よって増減表は

x		α		$e^{-\frac{1}{2}}$		β	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	$\searrow$		$\searrow$

となる。$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ である。また $\lim_{x\to+0} f(x)$ を求める。$\log y = -x^2\log x$ の極限を求める。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} \log f(x) &= \lim_{x\to+0}\left(-x^2\log x\right) = -\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \\
&= -\lim_{x\to+0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = -\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-2\frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to+0} x^2 = 0
\end{aligned}
$$

なので，$0 = \lim_{x\to+0}\log f(x) = \log\left(\lim_{x\to+0} f(x)\right)$ となる。よって $\lim_{x\to+0} f(x) = 1$ となる。以上を考慮してグラフを書くと次図の様になる。



(10)

$$\begin{aligned} y' &= 4(x-5)^3(x+1)^3 + 3(x-5)^4(x+1)^2 \\ &= (x-5)^3(x+1)^2\{4(x+1)+3(x-5)\} \\ &= (x-5)^3(x+1)^2(7x-11) \end{aligned}$$

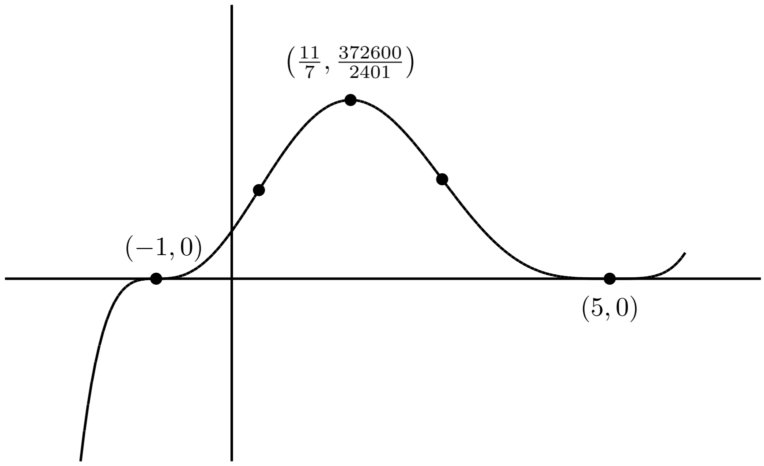
なので $y'=0$ を解いて $x=-1$，5，$\dfrac{11}{7}$ を得る。

$$y'' = 6(x-5)^2(x+1)(7x^2-22x+7)$$

なので $y''=0$ を解いて $x=-1$，5，$\dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}$，$\dfrac{11-6\sqrt{2}}{7}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
y'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↗		↗		↗		↘		↘		↗

x 軸との交点は $y=0$ を解いて $x=-1,5$ である。y 軸との交点は y に $x=0$ を代入して $(-5)^4 = 5^4$ である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次の様になっている。



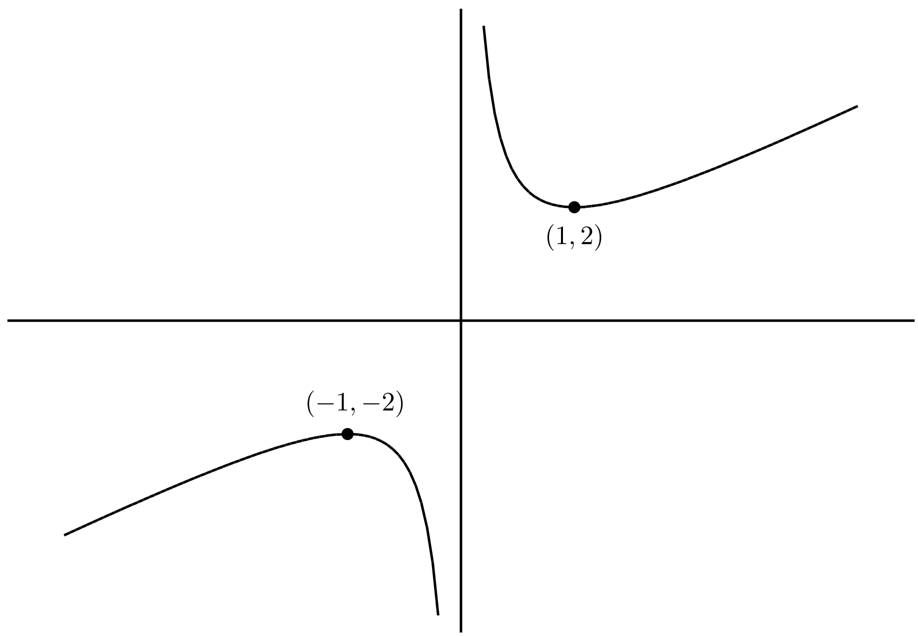
(11) $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = -1,\ 1$ を得る。$y'' = \dfrac{2}{x^3}$ なので増減表は次の様になる。

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y	↗		↘	$\times$	↘		↗

グラフは x 軸とも y 軸とも交わらない。

$$\lim_{x\to+0} y = \infty, \quad \lim_{x\to-0} y = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} y = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$$

なのでグラフの概形は次の様になる。



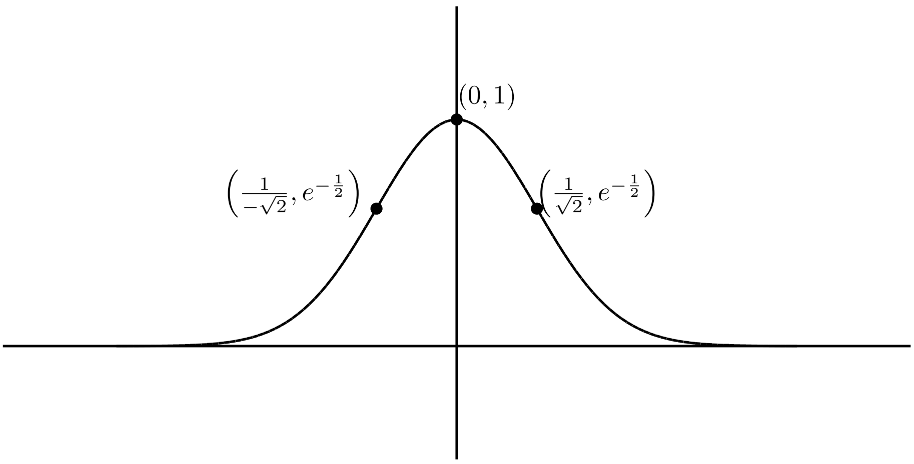
(12) $y' = -2xe^{-x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = 0$ を得る。$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ なので $y'' = 0$ を解いて $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

グラフは x 軸とは交わらない。y 軸との交点は $y = 1$ である。また

$$\lim_{x\to\infty} y = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次の様になる。



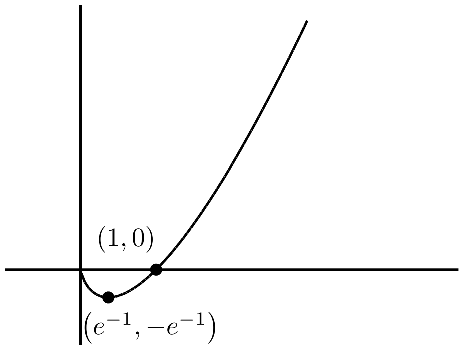
(13) $y' = \log x + 1$ なので $y' = 0$ を解いて $x = \dfrac{1}{e}$ を得る。$y'' = \dfrac{1}{x}$ なので $y'' = 0$ となる x は存在しない。よって増減表は次の様になる。

x	0		$\dfrac{1}{e}$	
y'	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$\times$	$+$	$+$	$+$
y		$\searrow$		$\nearrow$

x 軸との交点は $x = 1$ であり，y 軸とは交わらない。また $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ である。この後学んだロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} x\log x &= \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\left(\log x\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0
\end{aligned}$$

が分かる。以上からグラフの概形は次の様になっている。



演習問題 1.29　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。
(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$
(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$
(3) $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = 2t^4 - t$
(4) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2 - t^4$

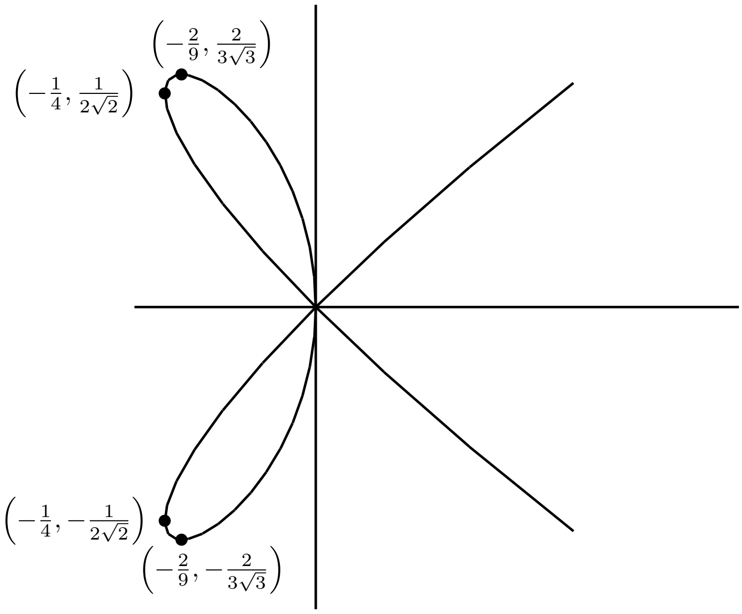
(1)　$x'(t) = 4t^3 - 2t$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。$y'(t) = 3t^2 - 1$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$，$(x(0), y(0)) = (0, 0)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{9}, -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ である。

　$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 0)$，$(x(1), y(1)) = (0, 0)$，$(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$ なので y 軸との交点は $(0, 0)$ である。

　$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。x 軸との交点は $(0, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



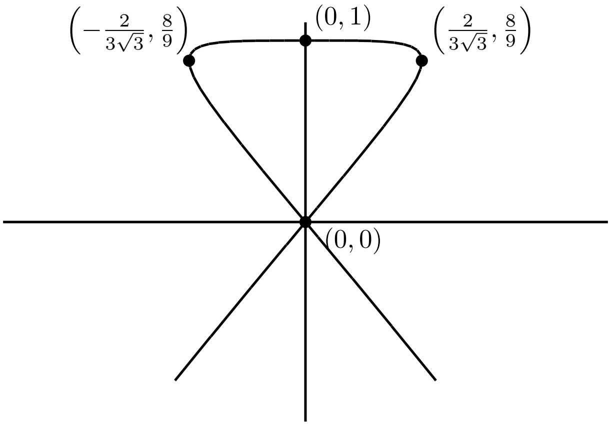
(2)　$x'(t) = 1 - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$y'(t) = -4t^3$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = 0$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{8}{9}\right)$，$(x(0), y(0)) = (0, 1)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{8}{9}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 1)$，$(x(1), y(1)) = (0, 0)$，$(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$ なので y 軸との交点は $(0, 0), (0, 1)$ である。

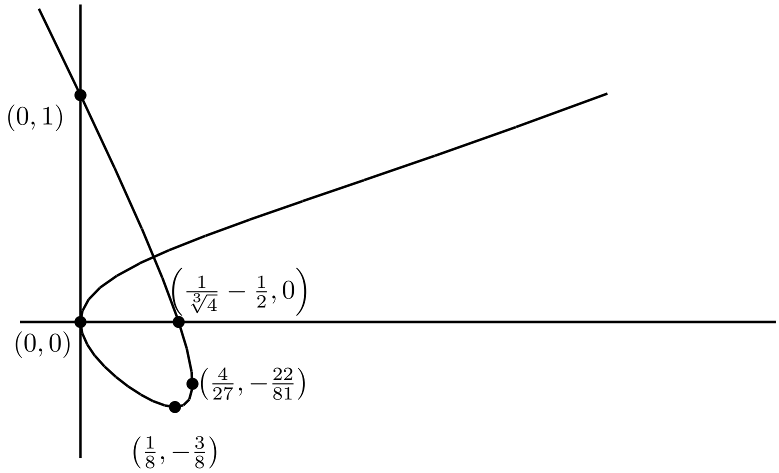
$y(t) = 0$ を解くと $t = \pm 1$ を得る。x 軸との交点は $(0, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



(3)　$x'(t)=2t-3t^2, y'(t)=8t^3-1$ なので $x'(t)=0$ を解くと，$t(2-3t)=0$ より $t=0,\dfrac{2}{3}$ を得る。$y'(t)=0$ を解くと，$8t^3-1=(2t-1)(4t^2+2t+1)=0$ より $t=\dfrac{1}{2}$ を得る。$x'(t),y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$

$x'(t)=0$ および $y'(t)=0$ となる点は $(0,0)$，$\left(\dfrac{1}{8},-\dfrac{3}{8}\right)$，$\left(\dfrac{4}{27},-\dfrac{22}{81}\right)$，である。$x(t)=0$ を解くと $t=0,1$ を得る。y 軸との交点は $(0,0),(0,1)$ である。$y(t)=0$ を解くと $t=0,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。x 軸との交点は $(0,0),\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}-\dfrac{1}{2},0\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



(4)　$x'(t)=1-3t^2$ なので $x'(t)=0$ を解いて $t=\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$y'(t)=-2t-4t^3=-2t(1+2t^2)$ なので $y'(t)=0$ を解いて $t=0$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x'(t)=0$ および $y'(t)=0$ となる点は $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{5}{9}\right)$，$(x(0), y(0))=(0,1)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{5}{9}\right)$ である。

$x(t)=0$ を解くと $t=0,\pm1$ を得る。$(x(0), y(0))=(0,1)$，$(x(1), y(1))=(0,-1)$，$(x(-1), y(-1))=(0,-1)$ なので y 軸との交点は $(0,1),(0,-1)$ である。

$y(t)=0$ を解く。$A=t^2$ とおくと $A\geq 0$ である。$t^4+t^2-1=A^2+A-1=0$ より $A=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ を得るが $A\geq 0$ より $A=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ である。よって $t=\pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ を得る。このとき $x(t)$ の値は $\pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。