解析学 I 問題解説 $\sharp 7$

河野

演習問題 2.9　定理 2.12 を示せ。

ここでは $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$ の記法を用いよう。$g(x,y)$ は微分可能であるから連続である。

$$\begin{aligned}
(f(x,y)g(x,y))_x &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)g(x+h,y)-f(x,y)g(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)g(x+h,y)-f(x,y)g(x+h,y)+f(x,y)g(x+h,y)-f(x,y)g(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}g(x+h,y)+f(x,y)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}\\
&= f_x(x,y)g(x,y)+f(x,y)g_x(x,y)
\end{aligned}$$

y に関しても同様に

$$\begin{aligned}
(f(x,y)g(x,y))_y &= \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)g(x,y+k)-f(x,y)g(x,y)}{k}\\
&= \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)g(x,y+k)-f(x,y)g(x,y+k)+f(x,y)g(x,y+k)-f(x,y)g(x,y)}{k}\\
&= \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}g(x,y+k)+f(x,y)\lim_{k\to 0}\frac{g(x,y+k)-g(x,y)}{k}\\
&= f_y(x,y)g(x,y)+f(x,y)g_y(x,y)
\end{aligned}$$

演習問題 *2.10　命題 2.13 を示せ。

最初に，ある実数 A, B が存在して

$$z(u(x+h,y+k)) = z(u(x,y)) + Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

に対し $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k) = 0$ となるとき $A = z_x(x,y), B = z_y(x,y)$ が成立することを注意しておく。

$u = u(x,y)$ が全微分可能なので

$$u(x+h,y+k) = u(x,y) + u_x(x,y)h + u_y(x,y)k + \varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

とおくと，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_1(h,k) = 0$ が成立する。

$z = z(u)$ は微分可能なので

$$z(u+H) = z(u) + \frac{dz}{du}H + \varepsilon(H)H$$

とすると $\displaystyle\lim_{H\to 0}\varepsilon(H) = 0$ が成立している。

$u = u(x,y), H = u_x(x,y)h+u_y(x,y)k+\varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ とおくと $u(x+h,y+k) = u(x,y)+H$

なので

$$
\begin{aligned}
z(u(x+h,y+k)) &= z(u(x,y)) + \frac{dz}{du}\left(u_x(x,y)h + u_y(x,y)k + \varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\right) + \varepsilon(H)H \\
&= z(u(x,y)) + \frac{dz}{du}u_x h + \frac{dz}{du}u_y k + \frac{dz}{du}\varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+h^2} + \varepsilon(H)H \\
&= z(u(x,y)) + \frac{dz}{du}u_x h + \frac{dz}{du}u_y k + \left(\frac{dz}{du}\varepsilon_1(h,k) + \frac{\varepsilon(H)H}{\sqrt{h^2+h^2}}\right)\sqrt{h^2+h^2}
\end{aligned}
$$

$\varepsilon(h,k) = \dfrac{dz}{du}\varepsilon_1(h,k) + \dfrac{\varepsilon(H)H}{\sqrt{h^2+h^2}}$ とおくとき $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ を示せば命題 2.13 が示される。

$\dfrac{h}{\sqrt{h^2+h^2}} \le 1, \dfrac{k}{\sqrt{h^2+h^2}} \le 1$ より

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\varepsilon(H)H}{\sqrt{h^2+h^2}}\right| &= \left|\varepsilon(H)\frac{u_x(x,y)h + u_y(x,y)k + \varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+h^2}}\right| \\
&\le |\varepsilon(H)|\left(|u_x(x,y)|\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+h^2}}\right| + |u_y(x,y)|\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+h^2}}\right| + |\varepsilon_1(h,k)|\right) \\
&\le |\varepsilon(H)|\left(|u_x(x,y)| + |u_y(x,y)| + |\varepsilon_1(h,k)|\right)
\end{aligned}
$$

となる。$(h,k)\to 0$ のとき $H\to 0$ となり，$\varepsilon(H)\to 0$ となる。また $\varepsilon_1(h,k)\to 0$ なので $\varepsilon(h,k)\to 0$ が成立する。よって $z_x = \dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x}, z_y = \dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial u}{\partial y}$ が成立する。

演習問題 *2.11　定理 2.14 を示せ。

$z(x(s,t),y(s,t))$ の全微分可能性を表す式を書くと，

$$
\begin{aligned}
z(x(s+h,t+k),y(s+h,t+k)) &= z(x(s,t),y(s,t)) + z_s(x(s,t),y(s,t))h \\
&\quad + z_t(x(s,t),y(s,t))k + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となっている。このとき

$$
\begin{aligned}
z(x(s+h,t+k),y(s+h,t+k)) &= z(x(s,t),y(s,t)) \\
&\quad + \left(z_x(x(s,t),y(s,t))x_s(s,t) + z_y(x(s,t),y(s,t))y_s(s,y)\right)h \\
&\quad + \left(z_x(x(s,t),y(s,t))x_s(s,t) + z_y(x(s,t),y(s,t))y_s(s,y)\right)k + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

に対し $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立することが分かれば，式 (3) と式 (4) とを比較して

$$
\begin{aligned}
z_s(x(s,t),y(s,t)) &= z_x(x(s,t),y(s,t))x_s(s,t) + z_y(x(s,t),y(s,t))y_s(s,t) \\
z_t(x(s,t),y(s,t)) &= z_x(x(s,t),y(s,t))x_t(s,t) + z_y(x(s,t),y(s,t))y_t(s,t)
\end{aligned}
$$

が成立することが分かる。

$z = z(x,y)$ および $x = x(s,t)$，$y = y(s,t)$ は微分可能なので，

$$
x(s+h,t+k) = x(s,t) + x_s(s,t)h + x_t(s,t)k + \varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \tag{5}
$$

$$
y(s+h,t+k) = y(s,t) + y_s(s,t)h + y_t(s,t)k + \varepsilon_2(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \tag{6}
$$

$$
z(x+h,y+k) = z(x,y) + z_x(x,y)h + z_y(x,y)k + \varepsilon_3(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \tag{7}
$$

が成立している。

$$H = x_s(s,t)h + x_t(s,t)k + \varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$
$$K = y_s(s,t)h + y_t(s,t)k + \varepsilon_2(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

とおくと，$x(s+h,t+k) = x(s,t)+H$，$y(s+h,t+k) = y(s,t)+K$ が成立している。これを $z(x(s+h,t+k),y(s+h,t+k))$ に代入して (7) を用いて変形すると (式が長くなるので，$z = z(x,y), x = x(s,t), y = y(s,t), z_x = z_x(s,t).z_y = z_y(s,t), x_s = x_s(s,t), x_t = x_t(s,t), y_s = y_s(s,t), y_t = y_t(s,t)$ と略記する)，

$$\begin{aligned}
&z(x(s+h,t+k),y(s+h,t+k)) = z(x(s,t)+H, y(s,t)+K)\\
&\qquad = z + z_xH + z_yK + \varepsilon_3(H,K)\sqrt{H^2+K^2}\\
&= z+z_x\left(x_sh + x_tk + \varepsilon_1(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\right)+z_y\left(y_sh + y_tk + \varepsilon_2(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\right)+\varepsilon_3(H,K)\sqrt{H^2+K^2}\\
&= z+(z_xx_s+z_yy_s)h+(z_xx_t+z_yy_t)k+\left(z_x\varepsilon_1(h,k)+z_y\varepsilon_2(h,k)+\frac{\varepsilon_3(H,K)\sqrt{H^2+K^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\sqrt{h^2+k^2}
\end{aligned}$$

となる。

$$\varepsilon(h,k) = z_x\varepsilon_1(h,k) + z_y\varepsilon_2(h,k) + \frac{\varepsilon_3(H,K)\sqrt{H^2+K^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく。$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ を示せば，定理が示される。

$(h,k) \to (0,0)$ のとき $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0$ かつ $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = 0$ が成立するので，$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_3(H,K)\sqrt{H^2+K^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ を示せばよい。

$(h,k) \to (0,0)$ のとき $\lim_{(h,k)\to(0,0)} H = 0$ および $\lim_{(h,k)\to(0,0)} K = 0$ が成立するので，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_3(H,K) = 0$$

が成立することに注意しておく。また

$$|h| \le \sqrt{h^2+k^2}, \quad |k| \le \sqrt{h^2+k^2}$$

が成立することにも注意しておく。簡単のため $x_s(s,t), x_t(s,t), y_s(s,t), y_t(s,t), \varepsilon_1(h,k), \varepsilon_2(h,k)$ をそれぞれ $x_s, x_t, y_s, y_t, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ と略記すると，

$$H = x_sh + x_tk + \varepsilon_1\sqrt{h^2+k^2}$$
$$K = y_sh + y_tk + \varepsilon_2\sqrt{h^2+k^2}$$

と書ける。

$$
\begin{aligned}
H^2 &= \left(x_s h + x_t k + \varepsilon_1\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 \\
&= x_s^2h^2 + x_t^2k^2 + \varepsilon_1^2(h^2+k^2) + 2x_s h x_t k + 2x_s h\varepsilon_1\sqrt{h^2+k^2} + 2x_t k\varepsilon_1\sqrt{h^2+k^2} \\
&\le x_s^2h^2 + x_t^2k^2 + \varepsilon_1^2(h^2+k^2) + 2|x_s||x_t||h||k| + 2|x_s||\varepsilon_1||h|\sqrt{h^2+k^2} + 2|x_t||\varepsilon_1||k|\sqrt{h^2+k^2} \\
&\le x_s^2(h^2+k^2) + x_t^2(h^2+k^2) + \varepsilon_1^2(h^2+k^2) + 2|x_s||x_t|(h^2+k^2) \\
&\qquad + 2|x_s||\varepsilon_1|\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{h^2+k^2} + 2|x_t||\varepsilon_1|\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{h^2+k^2} \\
&= \left(x_s^2 + x_t^2 + \varepsilon_1^2 + 2|x_s||x_t| + 2|x_s||\varepsilon_1| + 2|x_t||\varepsilon_1|\right)(h^2+k^2)
\end{aligned}
$$

となるので $S = x_s^2 + x_t^2 + \varepsilon_1^2 + 2|x_s||x_t| + 2|x_s||\varepsilon_1| + 2|x_t||\varepsilon_1|$ とおくと $H^2 \le S(h^2+k^2)$ が得られる。同様の議論で $T = y_s^2 + y_t^2 + \varepsilon_2^2 + 2|y_s||y_t| + 2|y_s||\varepsilon_2| + 2|y_t||\varepsilon_2|$ とおくと $K^2 \le T(h^2+k^2)$ が得られる。

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\varepsilon(H,K)\sqrt{H^2+K^2}}{h^2+k^2}\right| &\le |\varepsilon(H,K)|\frac{\sqrt{S(h^2+k^2)+T(h^2+k^2)}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= |\varepsilon(H,K)|\frac{\sqrt{S+T}\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= |\varepsilon(H,K)|\sqrt{S+T}
\end{aligned}
$$

から $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_3(H,K)\sqrt{H^2+K^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が成立することが分かる。

演習問題 2.12　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $z = x^3 - 3xy + y^3$　　(2) $z = (x^3+y^4)^{100}$

(3) $z = \dfrac{x-y}{2x+3y}$　　(4) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

(5) $z = e^{ax^2+by^2}$　　(6) $z = x\arctan\dfrac{x}{y}$

(7) $z = xy\sin(x^2+y^2)$　　(8) $z = x^2y^2\log(x^3+y^3)$

(9) $z = xy\arcsin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　　(10) $z = x^xy^yx^yy^x$

x に関する偏導関数は，y を定数として x に関する 1 変数関数と見て微分すれば求まる。よって 1 変数関数の色々な定理を用いて計算することができる。ここでは結果のみ記しておく。

ただし，(10) は前期やった対数微分法が必要である。

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 300(x^3+y^4)^{99}x^2,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 400(x^3+y^4)^{99}y^3$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{5y}{(2x+3y)^2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{5x}{(2x+3y)^2}$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2axe^{ax^2+by^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2bye^{ax^2+by^2}$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \arctan\dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\sin(x^2+y^2) + 2x^2y\cos(x^2+y^2), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x\sin(x^2+y^2) + 2xy^2\cos(x^2+y^2)$

(8) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2\log(x^3+y^3) + \dfrac{3x^4y^2}{x^3+y^3}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y\log(x^3+y^3) + \dfrac{3x^2y^4}{x^3+y^3}$

(9) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\arcsin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x\arcsin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$

(10)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= x^x(\log x+1)y^yx^yy^x + x^xy^yx^{y-1}y^{x+1} + x^xy^yx^yy^x\log y, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= x^xy^y(\log y+1)x^yy^x + x^xy^yx^{y+1}y^{x-1} + x^xy^yx^yy^x\log x
\end{aligned}$$

演習問題 2.13　次の関数について z_s, z_t および $z_{ss}, z_{st}, z_{ts}, z_{tt}$ を求めよ。

(1) $z = \sin x\cos y, x = s^2 - t^2, y = 2st$

(2) $z = \sin(x^2+y^2), x = s+t, y = st$

(3) $z = \sin(x+2y), x = \dfrac{t}{s}, y = \dfrac{s}{t}$

(1)　$z_x = \cos x\cos y, z_y = -\sin x\sin y$,　$x_s = 2s, x_t = -2t$,　$y_s = 2t, y_t = 2s$ なので

$$\begin{aligned}
z_s &= z_xx_s + z_yy_s = \cos x\cos y\cdot 2s - \sin x\sin y\cdot 2t \\
&= 2s\cos x\cos y - 2t\sin x\sin y \\
z_t &= z_xx_t + z_yy_t = \cos x\cos y\cdot(-2t) - \sin x\sin y\cdot 2s \\
&= -2t\cos x\cos y - 2s\sin x\sin y
\end{aligned}$$

となる。これを更に s および t で微分すると

$$\begin{aligned}
z_{ss} &= (z_s)_s = (2s\cos x\cos y - 2t\sin x\sin y)_s \\
&= (2s\cos x\cos y)_s - (2t\sin x\sin y)_s \\
&= (2s)_s\cos x\cos y + 2s\,(\cos x\cos y)_s - 2t\,(\sin x\sin y)_s \\
&= 2\cos x\cos y + 2s\,(\cos x)_s\cos y + 2s\cos x\,(\cos y)_s - 2t\,(\sin x)_s\sin y - 2t\sin x\,(\sin y)_s \\
&= 2\cos x\cos y - 2s\sin x\cdot 2s\cos y - 2s\cos x\sin y\cdot(2t) - 2t\cos x\cdot 2s\sin y - 2t\sin x\cos y\cdot(2t) \\
&= 2\cos x\cos y - 4(s^2+t^2)\sin x\cos y - 8st\cos x\sin y \\
z_{st} &= (z_s)_t = (2s\cos x\cos y - 2t\sin x\sin y)_t \\
&= (2s\cos x\cos y)_t - (2t\sin x\sin y)_t \\
&= 2s\,(\cos x\cos y)_t - (2t)_t\sin x\sin y - 2t\,(\sin x\sin y)_t \\
&= 2s\,(\cos x)_t\cos y + 2s\cos x\,(\cos y)_t - 2\sin x\sin y - 2t\,(\sin x)_t\sin y - 2t\sin x\,(\sin y)_t \\
&= -2\sin x\sin y + 4(t^2-s^2)\cos x\sin y
\end{aligned}$$

以下同様に計算して

$$z_{ts} = -2\sin x \sin y + 4(t^2 - s^2)\cos x \sin y$$
$$z_{tt} = -2\cos x \cos y - 4(s^2 + t^2)\sin x \cos y + 8st \cos x \sin y$$

を得る。

以下は結果のみを記す。

(2)

$$\begin{aligned}
z_s &= 2\left(s + t + st^2\right)\cos(x^2 + y^2) \\
z_t &= 2\left(s + t + s^2 t\right)\cos(x^2 + y^2) \\
z_{ss} &= 2\left(1 + t^2\right)\cos(x^2 + y^2) - 4\left(s + t + st^2\right)^2 \sin(x^2 + y^2) \\
z_{st} &= 2\left(1 + 2st\right)\cos(x^2 + y^2) - 4\left(s + t + st^2\right)\left(s + t + s^2 t\right)\sin(x^2 + y^2) \\
z_{ts} &= 2\left(1 + 2st\right)\cos(x^2 + y^2) - 4\left(s + t + st^2\right)\left(s + t + s^2 t\right)\sin(x^2 + y^2) \\
z_{tt} &= 2\left(1 + s^2\right)\cos(x^2 + y^2) - 4\left(s + t + s^2 t\right)^2 \sin(x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
z_s &= \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right)\cos(x + 2y) \\
z_t &= \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right)\cos(x + 2y) \\
z_{ss} &= \frac{2t}{s^3}\cos(x + 2y) - \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right)^2 \sin(x + 2y) \\
z_{st} &= -\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{t^2}\right)\cos(x + 2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right)\left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right)\sin(x + 2y) \\
z_{ts} &== -\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{t^2}\right)\cos(x + 2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right)\left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right)\sin(x + 2y) \\
z_{tt} &= \frac{4s}{t^3}\cos(x + 2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right)^2 \sin(x + 2y)
\end{aligned}$$

演習問題 2.14　定理 2.14 から定理 2.16 を導け。

定理 2.14 より

$$\begin{aligned}
x_s &= x_u u_s + x_v v_s & \qquad x_t &= x_u u_t + x_v v_t \\
y_s &= y_u u_s + y_v v_s & \qquad y_t &= y_u u_t + y_v v_t
\end{aligned}$$

が成立する。これを行列の形に書き直すと

$$\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$$

となり

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(s,t)}$$

が得られる。

2 変数関数 2 個の組

$$\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{cases} \qquad \begin{cases} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{cases}$$

が 2 つありお互いに逆関数になっているとき

$$x(u(x,y),v(x,y)) = x \qquad u(x(u,v),y(u,v)) = u$$

$$y(u(x,y),v(x,y)) = y \qquad v(x(u,v),y(u,v)) = v$$

となっている。これに今証明したことを適用すると

$$\frac{D(x,y)}{D(x,y)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$$

なるが

$$\frac{D(x,y)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} x_x & x_y \\ y_x & y_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.15　次の場合に $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 及び $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = u^2$　　(2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$

(3) $x = u\cos v, y = u\sin v$　　(4) $x = u, y = u + v$

$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を直接求めることは難しいので，最初に $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ を求めて，逆行列を求めることにより，$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求める。

ヤコビ行列は変数の順序が変わると別のヤコビ行列になる。順序を間違えないこと。$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ でいうと，独立変数が左から右へ u, v，従属変数は縦で上から下に x, y となる。

逆行列の求め方があやふやな人は必ず**検算**をすること。A が与えられた行列で B が求めた逆行列とするとき，正しければ AB は単位行列になる。

(1)　$\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0, \dfrac{\partial x}{\partial v} = 2v, \dfrac{\partial y}{\partial u} = 2u, \dfrac{\partial y}{\partial v} = 0$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$$

となる。$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2u} \\ \dfrac{1}{2v} & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}, \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \dfrac{1}{2(u^2+v^2)} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$

(3) $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}, \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\dfrac{\sin v}{u} & \dfrac{\cos v}{u} \end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列の求め方が分からない人 (またはすぐ忘れる人) へ: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられた。これを忘れたときは次の様に定義に基づいて逆行列を計算して求めてもよい。
$A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より p,q,r,s に関する連立 1 次方程式 (p,q,r,s が未知数で，a,b,c,d は既知数)

$$ap+br=1, aq+bs=0, cp+dr=0, cq+ds=1$$

を得る。これを解くと $p = \dfrac{d}{ad-bc}, q = \dfrac{-b}{ad-bc}, r = \dfrac{-c}{ad-bc}, d = \dfrac{a}{ad-bc}$ が分かる。

また基本変形を知っている人は基本変形を用いて逆行列を計算してもよい。$(A\ E) = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を基本変形して $(E\ B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & 1 & r & s \end{pmatrix}$ としたとき $A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ である。

演習問題 2.16 次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = x + y^2, s = x + y, t = xy$
(2) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2y^2$
(3) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$
(4) $z = x + y, s = x^2 - y^2, t = 2xy$
(5) $z = xy, s = x, t = x + y$
(6) $z = xy, s = x\cos y, t = x\sin y$

スペース節約のため 2 次導関数を行列の形で表現しているが，行列で表現しなければいけないというわけでは勿論ない。

(1) $\quad \dfrac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x-y} & -\dfrac{1}{x-y} \\ -\dfrac{y}{x-y} & \dfrac{1}{x-y} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = (1 \;\; 2\,y)$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-2\,y^2}{x-y} & \dfrac{-1+2\,y}{x-y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{y\,(-1+2\,y)}{(x-y)^2} & -\dfrac{4\,x\,y-2\,y^2-x}{(x-y)^2} \\ -\dfrac{-1+2\,y}{(x-y)^2} & \dfrac{2\,x-1}{(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\,y\,(-x+3\,x\,y-y^2)}{(x-y)^3} & -\dfrac{-x+4\,x\,y-y}{(x-y)^3} \\ -\dfrac{-x+4\,x\,y-y}{(x-y)^3} & \dfrac{2\,(-1+y+x)}{(x-y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(2) $\quad \dfrac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ 2\,x\,y^2 & 2\,x^2\,y \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2\,(x^2-y^2)} & -\dfrac{1}{2\,x\,(x^2-y^2)} \\ -\dfrac{y}{2\,(x^2-y^2)} & \dfrac{1}{2\,y\,(x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\,(x+y)} & \dfrac{1}{2\,(x+y)\,x\,y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\,(x+y)^2} & -\dfrac{1}{2\,(x+y)^2} \\ -\dfrac{2\,x+y}{2\,(x+y)^2\,x^2\,y} & -\dfrac{2\,y+x}{2\,(x+y)^2\,x\,y^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s, z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s, z_t)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4\,(x+y)^3} & -\dfrac{1}{4\,(x+y)^3\,x\,y} \\ -\dfrac{1}{4\,(x+y)^3\,x\,y} & -\dfrac{x^2+3\,x\,y+y^2}{4\,(x+y)^3\,y^3\,x^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(3)　$\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ y & x \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2\,(x^2-y^2)} & -\dfrac{y}{x^2-y^2} \\ -\dfrac{y}{2\,(x^2-y^2)} & \dfrac{x}{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\,(x+y)} & \dfrac{1}{x+y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\,(x+y)^2} & -\dfrac{1}{2\,(x+y)^2} \\ -\dfrac{1}{(x+y)^2} & -\dfrac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s, z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s, z_t)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4\,(x+y)^3} & -\dfrac{1}{2\,(x+y)^3} \\ -\dfrac{1}{2\,(x+y)^3} & -\dfrac{1}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(4)　$\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 2\,x & -2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2\,(x^2+y^2)} & \dfrac{y}{2\,(x^2+y^2)} \\ -\dfrac{y}{2\,(x^2+y^2)} & \dfrac{x}{2\,(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-y}{2\,(x^2+y^2)} & \dfrac{x+y}{2\,(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} -\dfrac{x^2-y^2-2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{x^2-y^2+2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} \\ -\dfrac{x^2-y^2+2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^2-y^2-2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{-3\,x^2\,y+y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} & -\dfrac{3\,x^2\,y-y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} \\ -\dfrac{3\,x^2\,y-y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} & \dfrac{-3\,x^2\,y+y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(5) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}=\frac{D(z)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} y-x & x \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

(6) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} \cos y & -x\,\sin y \\ \sin y & x\,\cos y \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\dfrac{\sin y}{x} & \dfrac{\cos y}{x} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}=\frac{D(z)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} y\,\cos y-\sin y & y\,\sin y+\cos y \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} 0 & -y\,\sin y \\ 0 & y\,\cos y \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{y\,\sin^2 y}{x} & -\dfrac{y\,\sin y\,\cos y}{x} \\ -\dfrac{y\,\sin y\,\cos y}{x} & \dfrac{y\,\cos^2 y}{x} \end{pmatrix}$$

を得る。

演習問題 2.17　$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とする (2 次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ およびヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算し，関数 $z=f(x,y)$ に対し次を示せ。

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

ヤコビ行列は $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ なので

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\cos\theta\times r\cos\theta-(-r\sin\theta)\times\sin\theta=r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r$$

である。

(1)　$\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$ なので

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial \theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta \tag{8}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta \\
&\quad +\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

となる。
(2)　式 (8) より

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin\theta$$

となるが,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin\theta \\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta
\end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

を得る。計算の途中で $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を使った。
　同様に式 (8) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)r\sin\theta - \frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)r\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta
\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}r\cos\theta \\
\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}r\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\cos\theta
\end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}r^2\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta - \frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right) \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}
\end{aligned}$$

を得る。

演習問題 2.18

(1) $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

1) $z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$

2) $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$

(2) $x + y = e^{u+v}$, $x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u$, $y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

(1)　x を u で微分すると $x_u = \cos\alpha$, v で微分すると $x_v = -\sin\alpha$ を得る。同様に $y_u = \sin\alpha$, $y_v = \cos\alpha$ となる。合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\ z_v &= z_x x_v + z_y y_v \end{aligned}$$

が得られる。これを用いて $z_u^2 + z_v^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} z_u^2 + z_v^2 &= (z_x\cos\alpha - z_y\sin\alpha)^2 + (z_x\sin\alpha + z_y\cos\alpha)^2 \\ &= z_x^2\cos^2\alpha - 2z_xz_y\cos\alpha\sin\alpha + z_y^2\sin^2\alpha + z_x^2\sin^2\alpha + 2z_xz_y\sin\alpha\cos\alpha + z_y^2\cos^2\alpha \\ &= z_x^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z_y^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \\ &= z_x^2 + z_y^2 \end{aligned}$$

となる。

$z_u = z_x x_u + z_y y_u$ を u で微分すると，積の微分法より

$$(z_u)_u = (z_x)_u x_u + z_x(x_u)_u + (z_y)_u y_u + z_y(y_u)_u$$

となる。x_u, y_u は定数なので $(x_u)_u = 0, (y_u)_u = 0$ である。また $(z_x)_u, (z_y)_u$ に合成関数の微分法をもう一度適用すると，$(z_x)_u = (z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u, (z_y)_u = (z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u$ となる。よってこれらを前式に代入すると

$$z_{uu} = z_{xx}x_u^2 + 2z_{xy}x_u y_u + z_{yy}y_u^2 = z_{xx}\cos^2\alpha + 2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\sin^2\alpha$$

が得られる。ただし計算途中で $z_{xy} = z_{yx}$ を使用した。同様に z_{vv} を計算すると

$$z_{vv} = z_{xx}\sin^2\alpha - 2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\cos^2\alpha$$

となり, これらを加えると

$$z_{uu} + z_{vv} = z_{xx}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z_{yy}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = z_{xx} + z_{yy}$$

となる。

(2)　$x = \dfrac{e^{u+v} + e^{u-v}}{2}, y = \dfrac{e^{u+v} - e^{u-v}}{2}$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

となる。

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x x + z_y y$$

を u で微分すると

$$
\begin{aligned}
z_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u}(z_x x) + \frac{\partial}{\partial u}(z_y y) \\
&= (z_x)_u x + z_x x_u + (z_y)_u y + z_y y_u \\
&= (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u)\, x + z_x x + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u)\, y + z_y y \\
&= z_{xx} x^2 + 2 z_{xy} xy + z_{yy} y^2 + z_x x + z_y y
\end{aligned}
$$

となる。

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x y + z_y x$$

を v で微分すると

$$
\begin{aligned}
z_{vv} &= (z_x)_v y + z_x y_v + (z_y)_v x + z_y x_v \\
&= (z_{xx} x_v + z_{xy} y_v)\, y + z_x x + (z_{yx} x_v + z_{yy} y_v)\, x + z_y y \\
&= z_{xx} y^2 + 2 z_{xy} xy + z_{yy} x^2 + z_x x + z_y y
\end{aligned}
$$

となる。よって $z_{uu} - z_{vv} = (z_{xx} - z_{yy})(x^2 - y^2)$ となるが，$x^2 - y^2 = e^{2u}$ なので式が証明された。
(3)　$x = u - y = u - uv$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}$$

である。

$$z_u = z_x x_u + z_y v y_u = z_x(1-v) + z_y v$$

を u で微分すると

$$
\begin{aligned}
z_{uu} &= (z_x)_u (1-v) + (z_y)_u v \\
&= (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u)(1-v) + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u)\, v \\
&= z_{xx}(1-v)^2 + 2 z_{xy} v(1-v) + z_{yy} v^2
\end{aligned}
$$

であり，z_u を v で微分すると

$$
\begin{aligned}
z_{uv} &= (z_x)_v (1-v) + z_x (1-v)_v + (z_y)_v v + z_y v_v \\
&= (z_{xx} x_v + z_{xy} y_v)(1-v) - z_x + (z_{yx} x_v + z_{yy} y_v)\, v + z_y \\
&= -z_{xx} u(1-v) + z_{xy} u(1-v) - z_{xy} uv + z_{yy} uv - z_x + z_y
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
u z_{uu} - v z_{uv} + z_u &= z_{xx} u(1-v)^2 + 2 z_{xy} uv(1-v) + z_{yy} uv^2 + z_{xx} uv(1-v) - z_{xy} uv(1-v) \\
&\quad + z_{xy} uv^2 - z_{yy} uv^2 + z_x v - z_y v + z_x(1-v) + z_y v \\
&= z_{xx} u(1-v) + z_{xy} uv + z_x \\
&= x z_{xx} + y z_{xy} + z_x
\end{aligned}
$$

が得られる。

演習問題 2.19　$f(x_1,x_2,x_3)$ が (a_1,a_2,a_3) で全微分可能のとき $f(x_1,x_2,x_3)$ は (a_1,a_2,a_3) で偏微分可能であり，$A=f(a_1,a_2,a_3), B=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,a_3), C=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3), D=\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,a_3)$ となることを示せ。

$$\varepsilon(h_1,h_2,h_3)=\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}\left\{f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+h_3)-\big(A+Bh_1+Ch_2+Dh_3\big)\right\}$$

に対し

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)}\varepsilon(h_1,h_2,h_3)=0$$

が成立している。

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)}\varepsilon(h_1,h_2,h_3)\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}=0$$

も成立するので

$$\begin{aligned}0&=\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)}\varepsilon(h_1,h_2,h_3)\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\\&=\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)}\left\{f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+h_3)-\big(A+Bh_1+Ch_2+Dh_3\big)\right\}\\&=f(a_1,a_2,a_3)-A\end{aligned}$$

より

$$A=f(a_1,a_2,a_3)$$

が得られる。

$$\varepsilon(h_1,0,0)=\frac{1}{\sqrt{h_1^2}}\left\{f(a_1+h_1,a_2,a_3)-\big(f(a_1,a_2,a_3)+Bh_1\big)\right\}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x_1}&=\lim_{h_1\to0}\frac{f(a_1+h_1,a_2,a_3)-f(a_1,a_2,a_3)}{h_1}\\&=\lim_{h_1\to0}\frac{\varepsilon(h_1,0,0)\sqrt{h_1^2}}{h_1}+B=B\end{aligned}$$

$$\varepsilon(0,h_2,0)=\frac{1}{\sqrt{h_2^2}}\left\{f(a_1,a_2+h_2,a_3)-\big(f(a_1,a_2,a_3)+Ch_2\big)\right\}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x_2}&=\lim_{h_2\to0}\frac{f(a_1,a_2+h_2,a_3)-f(a_1,a_2,a_3)}{h_2}\\&=\lim_{h_2\to0}\frac{\varepsilon(0,h_2,0)\sqrt{h_2^2}}{h_2}+C=C\end{aligned}$$

$$\varepsilon(0,0,h_3) = \frac{1}{\sqrt{h_3^2}}\left\{f(a_1,a_2,a_3+h_3) - \big(f(a_1,a_2,a_3) + Dh_3\big)\right\}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x_3} &= \lim_{h_3\to 0}\frac{f(a_1,a_2,a_3+h_3)-f(a_1,a_2,a_3)}{h_3}\\ &= \lim_{h_3\to 0}\frac{\varepsilon(0,0,h_3)\sqrt{h_3^2}}{h_3} + D = D\end{aligned}$$

演習問題 *2.20　定理 2.20 および定理 2.22 を証明せよ。

記述が煩雑になるので，基準になる点での関数の値 $f(x_1,x_2,x_3), x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)$ を $f, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'$ と書く。

f の微分可能性より

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3) = f + \sum_{i=1}^{3} f_{x_i} h_i + \varepsilon_0(h_1,h_2,h_3)\sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2} \tag{1}$$

とおくと $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \varepsilon_0(h_1,h_2,h_3) = 0$ が成立している。また各 i $(i=1,2,3)$ に対し

$$x_i(t+h) = x_i + x_i' h + \varepsilon_i(h) h \tag{2}$$

とおくと $\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon_i(h) = 0$ が成立している。

$h_i = x_i(t+h) - x_i$ とおき，式 (1) に式 (2) を代入すると

$$\begin{aligned} f(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3+h_3) &= f + \sum_{i=1}^{3} f_{x_i}\left(x_i'h + \varepsilon_i(h)h\right) + \varepsilon_0(h_1,h_2,h_3)\sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2}\\ &= f + \left(\sum_{i=1}^{3} f_{x_i}x_i'\right)h + \sum_{i=1}^{3} f_{x_i}\varepsilon_i(h)h + \varepsilon_0(h_1,h_2,h_3)\sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2}\\ &= f + \left(\sum_{i=1}^{3} f_{x_i}x_i'\right)h + \left(\sum_{i=1}^{3} f_{x_i}\varepsilon_i(h) + \frac{\varepsilon_0(h_1,h_2,h_3)}{h}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2}\right)h \end{aligned}$$

となる。

$$\varepsilon(h) = \sum_{i=1}^{3} f_{x_i}\varepsilon_i(h) + \frac{\varepsilon_0(h_1,h_2,h_3)}{h}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2}$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ を示せばよい。

$h_i = x_i'h + \varepsilon_i(h)h$ より

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i' + \varepsilon_i(h))^2 h^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i' + \varepsilon_i(h))^2}|h|$$

$h \to 0$ のとき $\varepsilon_i(h) \to 0$ $(i = 1, 2, 3)$ であり，$h_i \to 0$ $(i = 1, 2, 3)$ より $\varepsilon_0(h_1, h_2, h_3) \to 0$ となる。よって

$$\varepsilon(h) \to 0$$

が示される。

定理 2.22 を示す。そのためには

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial t_j}$$

を示せばよい。$z = x_i$ として

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial t_i}$$

を示す。

前と同様に基準の点における関数の値を略記する。$z(u_1, u_2, u_3) = z$, $u_j(t_1, t_2, t_3) = u_j$ $(j = 1, 2, 3)$ ，$z_{u_j}(u_1, u_2, u_3) = z_{u_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ ，$u_{j_{t_i}}(t_1, t_2, t_3) = u_{j_{t_i}}$ $(j = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, 3)$ ，$\varepsilon_0(k_1, k_2, k_3) = \varepsilon_0$ ，$\varepsilon_i(h_1, h_2, h_3) = \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, 3)$

$$z(u_1 + k_1, u_2 + k_2, u_3 + k_3) = z + \sum_{j=1}^{3} z_{u_j} k_j + \varepsilon_0 \sqrt{\sum_{j=1}^{3} k_j^2} \tag{3}$$

とおくと $\lim\limits_{(k_1,k_2,k_3)\to(0,0,0)} \varepsilon_0 = 0$ が成立している。$j = 1, 2, 3$ に対し

$$u_j(t_1 + h_1, t_2 + h_2, t_3 + h_3) = u_j + \sum_{i=1}^{3} u_{j_{t_i}} h_i + \varepsilon_j \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2} \tag{4}$$

とおくと $\lim\limits_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \varepsilon_j = 0$ が成立している。

$k_j = u_j(t_1 + h_1, t_2 + h_2, t_3 + h_3) - u_j$ $(j = 1, 2, 3)$ とおき，式 (4) を式 (3) に代入すると

$$\begin{aligned}
z(u_1 + k_1, u_2 + k_2, u_3 + k_3) &= z + \sum_{j=1}^{3} z_{u_j} \left(\sum_{i=1}^{3} u_{j_{t_i}} h_i + \varepsilon_j \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2} \right) + \varepsilon_0 \sqrt{\sum_{j=1}^{3} k_j^2} \\
&= z + \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} z_{u_j} u_{j_{t_i}} \right) h_i + \sum_{j=1}^{3} z_{u_j} \varepsilon_j \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2} + \varepsilon_0 \sqrt{\sum_{j=1}^{3} k_j^2} \\
&= z + \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} z_{u_j} u_{j_{t_i}} \right) h_i + \left(\sum_{j=1}^{3} z_{u_j} \varepsilon_j + \varepsilon_0 \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{3} k_j^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2}} \right) \sqrt{\sum_{i=1}^{3} h_i^2}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon(h_1,h_2,h_3)=\sum_{j=1}^{3} z_{u_j}\varepsilon_j+\varepsilon_0\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{3}k_j^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}h_i^2}}$$ とおく。

$$M=\max\left\{ |u_{j_{t_i}}(s_1,s_2,s_3)| \;\middle|\; i=1,2,3, s_i\text{は } t_i\text{と } t_i+h_i\text{を両端とする区間内の元} \right\}$$ とおくと

$$\begin{aligned}|k_j| &\leq \sum_{i=1}^{3}\left|u_{j_{t_i}}\right|\cdot|h_i|+|\varepsilon_j|\sqrt{\sum_{i=1}^{3}h_i^2}\leq \sum_{j=1}^{3}M|h_i|+|\varepsilon_j|\sqrt{\sum_{i=1}^{3}h_i^2}\\ &= M\sum_{j=1}^{3}|h_i|+|\varepsilon_j|\sqrt{\sum_{i=1}^{3}h_i^2}\end{aligned}$$

$$|k_j|^2\leq M^2\left(\sum_{i=1}^{3}|h_i|\right)^2+2M\sum_{i=1}^{3}|h_i|\,|\varepsilon_j|\sqrt{\sum_{i=1}^{3}h_i^2}+|\varepsilon_j|^2\sum_{i=1}^{3}h_i^2$$

$$\sum_{j=1}^{3}k_j^2\leq 3M^2\left(\sum_{i=1}^{3}|h_i|\right)^2+2M\sum_{i=1}^{3}|h_i|\sum_{j=1}^{3}|\varepsilon_j|\sqrt{\sum_{i=1}^{3}h_i^2}+\sum_{j=1}^{3}|\varepsilon_j|^2\sum_{i=1}^{3}h_i^2$$

よって

$$\frac{\sum_{j=1}^{3}k_j^2}{\sum_{i=1}^{3}h_i^2}$$

は有界である。このことと $(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)$ のとき $k_j\to 0\ (j=1,2,3)$, $\varepsilon_j\to 0\ (j=1,2,3)$, $\varepsilon_0\to 0$ より $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)}\varepsilon(h_1,h_2,h_3)=0$ の成立が分かる。

演習問題 2.21 次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $w=f(x,y,z)=x^2y^3z^4$

(2) $w=xyz\sin(x^2+y^2+z^2)$

(3) $w=e^{x^2+y^3+z^4}$

(4) $w=x^2y^3\log(x^2+y^3+z^4)$

(1) $\dfrac{\partial w}{\partial x}=2xy^3z^4,\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=3x^2y^2z^4,\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=4x^2y^3z^3$

(2) $\dfrac{\partial w}{\partial x}=yz\sin(x^2+y^2+z^2)+2x^2yz\cos(x^2+y^2+z^2)$,

$\dfrac{\partial w}{\partial y}=xz\sin(x^2+y^2+z^2)+2xy^2z\cos(x^2+y^2+z^2)$,

$\dfrac{\partial w}{\partial z}=xy\sin(x^2+y^2+z^2)+2xyz^2\cos(x^2+y^2+z^2)$

(3) $\dfrac{\partial w}{\partial x}=2xe^{x^2+y^3+z^4},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=3y^2e^{x^2+y^3+z^4},\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=4z^3e^{x^2+y^3+z^4}$

(4) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3\log(x^2+y^3+z^4) + \dfrac{2x^3y^3}{x^2+y^3+z^4}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2\log(x^2+y^3+z^4) + \dfrac{3x^2y^5}{x^2+y^3+z^4}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{4x^2y^3z^3}{x^2+y^3+z^4}$

演習問題 2.22　次の場合に $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ 及び $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = w^2, z = u^2$
(2) $x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2uw$
(3) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u + w$
(4) $x = u, y = u + v, z = u + v + w$

(1)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 2u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) のみ逆行列を求める計算を記す。ここでは線型代数の知識はないとして直接計算で求めている。線型代数において学んだ逆行列の求め方を知っているものは勿論それを用いて計算してよい。

逆行列を $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\,v & 0 \\ 0 & 0 & 2\,w \\ 2\,u & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので,a,b,c,d,e,f,g,h,i は連立 1 次方程式

$$2vd = 1, 2ve = 0, 2vf = 0, 2wg = 0, 2wh = 1, 2wi = 0, 2ua = 0, 2ub = 0, 2uc = 1$$

の解なので，連立 1 次方程式を解くと

$$a = 0, b = 0, c = \frac{1}{2u}, d = \frac{1}{2v}, e = 0, f = 0, g = 0, h = \frac{1}{2w}, i = 0$$

が得られる (ここで $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ として計算した)。よって

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{2\,u} \\ \dfrac{1}{2\,v} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\,w} & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(2)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v & 2w \\ 2v & 2u & 0 \\ 2w & 0 & 2u \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{2(u^2+v^2-w^2)} & \dfrac{v}{2\,(u^2+v^2-w^2)} & -\dfrac{w}{2(u^2+v^2-w^2)} \\ -\dfrac{v}{2\,(u^2+v^2-w^2)} & \dfrac{u^2-w^2}{2u(u^2+v^2-w^2)} & -\dfrac{vw}{2u(u^2+v^2-w^2)} \\ -\dfrac{w}{2(u^2+v^2-w^2)} & -\dfrac{vw}{2u(u^2+v^2-w^2)} & \dfrac{u^2+v^2}{2u(u^2+v^2-w^2)} \end{pmatrix}$$

である。

(3)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\,\sin v & 0 \\ \sin v & u\,\cos v & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\dfrac{\sin v}{u} & \dfrac{\cos v}{u} & 0 \\ -\cos v & -\sin v & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(4)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 2.23　次の関数に対し $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $w = x^3 + y^3 + z^3, x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$

(2) $w = x + y + z, x^2 + y^2 + z^2 = s, xyz = t, xy + yz + zx = u$

(1)

$$\frac{D(s,t,u)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial z} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} & \dfrac{\partial t}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} = \left(\frac{D(s,t,u)}{D(x,y,z)}\right)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} & -\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} & \dfrac{1}{(x-y)(x-z)} \\ \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} & -\dfrac{y}{(y-z)(y-x)} & \dfrac{1}{(y-z)(y-x)} \\ \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)} & -\dfrac{z}{(z-x)(z-y)} & \dfrac{1}{(z-x)(z-y)} \end{pmatrix}$$

となる。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 3z^2$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3xy + 3zx + 3yz \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= -3x - 3y - 3z \\ \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。$X = \dfrac{\partial w}{\partial s}$ とおき，これに合成関数の微分法を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial X}{\partial s} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 6x + 6y + 6z \end{aligned}$$

が得られる。同様に計算して

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial w_t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= -3 \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial w_t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\
&= 0 \\
\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{\partial w_u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(2)　この問題は x, y, z に関する対称式 (x, y, z を入れ換えても式が変わらない) に関係しているので，変数間に特殊な関係が存在する。ここではそのことを使って解く方法を紹介する。勿論 (1) と同様に方法で解いてもよい。

$$
\begin{aligned}
w^2 &= (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\
&= s + 2u
\end{aligned}
$$

が成立している。両辺を s で微分すると，

$$
\frac{\partial w^2}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial s} + 2\frac{\partial u}{\partial s}
$$

となる。s で微分するとき t, u は固定されているので

$$
\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial s} = 1
$$

である。$\dfrac{\partial w^2}{\partial s} = 2w\dfrac{\partial w}{\partial s}$ なので $2w\dfrac{\partial w}{\partial s} = 1$ より

$$
\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2(x+y+z)}
$$

となる。$w^2 = s + 2u$ を t で微分すると

$$
\frac{\partial w^2}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial t}
$$

となる。$\dfrac{\partial s}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ より

$$
\frac{\partial w}{\partial t} = 0
$$

となる。$w^2 = s + 2u$ を u で微分すると，

$$
\frac{\partial w^2}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial u} + 2\frac{\partial u}{\partial u}
$$

となる。$\dfrac{\partial s}{\partial u}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial u}=1$ である。$\dfrac{\partial w^2}{\partial u}=2w\dfrac{\partial w}{\partial u}$ なので

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{w}=\frac{1}{x+y+z}$$

となる。

$2ww_s=1$ の両辺を s で微分すると $2w_sw_s+2ww_{ss}=0$ を得るので

$$\begin{aligned} w_{ss}&=-\frac{w_s^2}{w}=-\frac{1}{w}\left(\frac{1}{2w}\right)^2\\ &=-\frac{1}{4(x+y+z)^3} \end{aligned}$$

$w_t=0$ なので $w_{tt}=0,\ w_{ts}=0$ である。また $ww_u=1$ の両辺を u で微分すると $w_uw_u+ww_{uu}=0$ を得るので,

$$\begin{aligned} w_{uu}&=-\frac{w_u^2}{w}=-\frac{1}{w}\left(\frac{1}{w}\right)^2\\ &=-\frac{1}{(x+y+z)^3} \end{aligned}$$

となる。

(1) の問題もここで紹介した方法を用いて計算できる。興味のあるものは試みよ。

演習問題 2.24 $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ とする (3 次元の極座標表示)。関数 $w=f(x,y,z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial w}{\partial\varphi}$

3 次行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ に対しその行列式は

$$\det A=aei+dhc+gbf-gec-dbi-ahf$$

であるということは知っているとする。

(1)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \quad = \quad \det\left(\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right) = r^2\sin\theta$$

となる。
(2)

$$\frac{D(w)}{D(r,\theta,\varphi)} = \frac{D(w)}{D(x,y,z)}\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}$$

なので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial z}\cos\theta \\
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial w}{\partial z}r\sin\theta \\
\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x}r\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}r\sin\theta\cos\varphi
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial z}\cos\theta \\
\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial w}{\partial z}\sin\theta \\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\varphi
\end{aligned}$$

となるので，各式を 2 乗して加えると

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

が成立する。
(3)　$w_r = w_x x_r + w_y y_r + w_z z_r$ を r で微分して

$$\begin{aligned}
w_{rr} &= (w_x)_r x_r + w_x x_{rr} + (w_y)_r y_r + w_y y_{rr} + (w_z)_r z_r + w_z z_{rr} \\
&= (w_{xx}x_r + w_{xy}y_r + w_{xz}z_r)x_r + w_x x_{rr} + (w_{yx}x_r + w_{yy}y_r + w_{yz}z_r)y_r \\
&\quad + w_y y_{rr} + (w_{zx}x_r + w_{zy}y_r + w_{zz}z_r)z_r + w_z z_{rr} \\
&= w_{xx}x_r^2 + w_{yy}y_r^2 + w_{zz}z_r^2 + 2w_{xy}x_r y_r + 2w_{yz}y_r z_r + 2w_{xz}x_r z_r + w_x x_{rr} + w_y y_{rr} + w_z z_{rr}
\end{aligned}$$

を得る。同様に $w_{\varphi\varphi}$,$(\sin\theta w_\theta)_\theta$ を計算し，$w_{rr} + \dfrac{2}{r}w_r + \dfrac{1}{r^2\sin\theta} + (\sin\theta w_\theta)_\theta + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}w_\varphi$ の計算を実行すると求める式が得られる。