

演習問題 2.31 命題 2.27 を示せ。

(a, b) が f の広義の極大点とする。ある $\delta > 0$ が存在して $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ ならば $f(a, b) \geq f(x, y)$ が成立しているので、絶対値が十分小さい (0 に近い) h, k に対し

$$f(a+h, b) \leq f(a, b), \quad f(a, b+k) \leq f(a, b)$$

が成立している。 $h > 0$ のとき $\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0$ が成立しているので、

$$f_x^+(a, b) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0$$

$h < 0$ のとき $\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \geq 0$ が成立しているので、

$$f_x^-(a, b) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \geq 0$$

よって

$$0 \leq f_x^-(a, b) = f_x(a, b) = f_x^+(a, b) \leq 0$$

より $f_x(a, b) = 0$ となる。

$k > 0$ のとき $\frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \leq 0$ が成立しているので、

$$f_y^+(a, b) = \lim_{k \rightarrow +0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \leq 0$$

$k < 0$ のとき $\frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \geq 0$ が成立しているので、

$$f_y^-(a, b) = \lim_{k \rightarrow -0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \geq 0$$

よって

$$0 \leq f_y^-(a, b) = f_y(a, b) = f_y^+(a, b) \leq 0$$

より $f_y(a, b) = 0$ となる。 (a, b) は f の臨界点である。

次に (広義の) 極小の場合を考える。 (a, b) が f の広義の極小点とする。絶対値が十分小さい (0 に近い) h と k に対して、 $f(a, b) \leq f(a+h, b+k)$ が成立している。 $h > 0$ のとき

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \geq 0$$

より

$$f_x^+(a, b) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \geq 0$$

が成立する。また $h < 0$ のとき $\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0$ より

$$f_x^-(a, b) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0$$

が成立する。よって

$$0 \leq f_x^+(a, b) = f_x(a, b) = f_x^-(a, b) \leq 0$$

より $f_x(a, b) = 0$ である。

$k > 0$ のとき $\frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \geq 0$ より

$$f_y^+(a, b) = \lim_{k \rightarrow +0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \geq 0$$

が成立する。また $k < 0$ のとき $\frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \leq 0$ より

$$f_y^-(a, b) = \lim_{k \rightarrow -0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \leq 0$$

が成立する。よって

$$0 \leq f_y^+(a, b) = f_y(a, b) = f_y^-(a, b) \leq 0$$

より $f_y(a, b) = 0$ である。 (a, b) は f の臨界点である。

演習問題 2.32 2次関数 $z = f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, $(a, b) = (0, 0)$ に対して定理 2.29 が成立することを示せ。(ヒント: $y \neq 0$ のとき関数を y^2 で割って, $t = \frac{x}{y}$ とおくと, 2次方程式の判別式が使える。)

$$z_x = 2Ax + 2By, \quad z_y = 2Bx + 2Cy, \quad z_{xx} = 2A, \quad z_{xy} = 2B, \quad z_{yy} = 2C$$

$(x, y) = (0, 0)$ は臨界点であり, $f(0, 0) = 0$ である。ヘッシアンは

$$H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4(AC - B^2)$$

となる。最初に $H > 0$ かつ $A > 0$ の場合を考える。 $y = 0$ のとき $f(x, 0) = Ax^2$ となるので, $x \neq 0$ のとき $f(x, 0) = Ax^2 > 0 = f(0, 0)$ となっている。 $y \neq 0$ のとき $\frac{1}{y^2}f(x, y) = A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2B\left(\frac{x}{y}\right) + C$ である。 $g(t) = At^2 + 2Bt + C$ とおくと, H は2次方程式 $g(t) = 0$ の判別式の符号を逆にしたものなので, $H > 0$ かつ $A > 0$ より, 任意の t に対し $g(t) > 0$ が成立する。よって $\frac{1}{y^2}f(x, y) > 0$ となり, $f(x, y) > 0$ が得られる。以上により $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $f(x, y) > f(0, 0)$ なので $(0, 0)$ で極小値をとる。

次に $H > 0$ かつ $A < 0$ のときを考える。 $y = 0$ のとき $f(x, 0) = Ax^2$ となるので, $x \neq 0$ のとき $f(x, 0) = Ax^2 < 0 = f(0, 0)$ となっている。 $y \neq 0$ のとき $\frac{1}{y^2}f(x, y) = A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2B\left(\frac{x}{y}\right) + C$

である。 $g(t) = At^2 + 2Bt + C$ とおくと、 H は 2 次方程式 $g(t) = 0$ の判別式の符号を逆にしたものなので、 $H > 0$ かつ $A < 0$ より、任意の t に対し $g(t) < 0$ が成立する。よって $\frac{1}{y^2}f(x, y) < 0$ となり、 $f(x, y) < 0$ が得られる。以上により $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $f(x, y) < f(0, 0)$ なので $(0, 0)$ で極大値をとる。

$A = 0$ のときは $H = -B^2$ なので $H > 0$ となることはない。よって $H > 0$ の場合は示された。

次に $H < 0$ のときを考える。 $y \neq 0$ として $t = \frac{x}{y}$ に対し $g(t) = At^2 + 2Bt + C$ を考える。 $H < 0$ なのでこのグラフは x 軸と交わる。よって $g(t)$ は正の値も負の値もとる。即ち $\exists t_1 g(t_1) > 0$ かつ $\exists t_2 g(t_2) < 0$ が成立する。このとき $t_1 = \frac{x_1}{y_1}$ となる (x_1, y_1) に対して $f(x_1, y_1) = \frac{1}{y_1^2}g(t_1) > 0$ となるので、 $f(x_1, y_1) > 0$ となる。 y_1 を充分小さくとると (x_1, y_1) は原点に充分近い。 $t_2 = \frac{x_2}{y_2}$ となる (x_2, y_2) に対して $f(x_2, y_2) = \frac{1}{y_2^2}g(t_2) < 0$ となるので、 $f(x_2, y_2) < 0$ となる。 y_2 を充分小さくとると (x_2, y_2) は原点に充分近い。 $(0, 0)$ にいくらでも近いところに $f(x_1, y_1) > 0$ となる点 (x_1, y_1) と $f(x_2, y_2) < 0$ となる点 (x_2, y_2) が存在するので $(0, 0)$ は極値ではない。

演習問題 *2.33 定理 2.29 を証明せよ。

式が長くなるので $f_{xy}(a, b)$ 等を f_{xy} 、 $f_{xy}(a + \theta h, b + \theta k)$ 等を $f_{xy}(\theta)$ と略記する。テーラーの定理より

$$R_3 = \frac{1}{3!} (h^3 f_{xxx}(\theta) + 3h^2 k f_{xxy}(\theta) + 3hk^2 f_{xyy}(\theta) + k^3 f_{yyy}(\theta))$$

とおくと

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_x + kf_y + \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}) + R_3$$

となる θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。 $F_2 = \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})$ とおくと、 $f_x(a, b) = 0$ 、 $f_y(a, b) = 0$ より

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = F_2 + R_3$$

となる。

$H(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ の場合を考える。 F_2 は h, k に関する 2 次式なので、演習問題 2.32 より原点の近くで $F_2 > 0$ となっている。 $F_2 + R_3 > 0$ が示されれば極小であることが分かる。

(h, k) に対し $r = \sqrt{h^2 + k^2}$ とし、

$$h = ru, \quad k = rv$$

とおくと (u, v) は半径 1 の円周上の点である。

$$F_2 = r^2 \frac{1}{2} (u^2 f_{xx} + 2uv f_{xy} + v^2 f_{yy})$$

$$R_3 = r^3 \frac{1}{6} (u^3 f_{xxx}(\theta) + 3u^2 v f_{xxy}(\theta) + 3uv^2 f_{xyy}(\theta) + v^3 f_{yyy}(\theta))$$

より

$$G_2(u, v) = \frac{1}{2} (u^2 f_{xx} + 2uv f_{xy} + v^2 f_{yy})$$

$$G_3(u, v) = \frac{1}{6} (u^3 f_{xxx}(\theta) + 3u^2 v f_{xxy}(\theta) + 3uv^2 f_{xyy}(\theta) + v^3 f_{yyy}(\theta))$$

とおく。

G_2 は r が変化しても変化しないが, r が変化すると θ が変化するので, r が変化すると G_3 が変化することを注意しておく。

(u, v) は半径 1 の円周上を動く。円周は有界閉集合なので, 最大値定理より $G_2(u, v)$ は最小値 M_2 をとる。このとき任意の (u, v) に対し $G_2 \geq M_2$ が成立する。 G_2 も 2 次式で F_2 と同じ条件を満たすので $G_2 > 0$ であり, $M_2 > 0$ である。充分小さな $\delta > 0$ に対し

$$N = \max \{ |f_{xxx}(a, y)|, |f_{xxy}(x, y)|, |f_{xyy}(x, y)|, |f_{yyy}(x, y)| \mid d((x, y), (a, b)) \leq \delta \}$$

とおくと

$$\begin{aligned} |G_3| &\leq \frac{1}{6} (|u|^3 N + 3|u|^2|v|N + 3|u||v|^2 N + |v|^3 N) \\ &= \frac{N}{6} (|u| + |v|)^3 \end{aligned}$$

となるが $\frac{N}{6}(|u| + |v|)^3$ も連続関数なので最大値 M_3 が存在する。 r を $M_3 r < M_2$ が成立するように十分小さくとると,

$$\begin{aligned} F_2 + R_3 &= r^2 G_2 + r^3 G_3 \geq r^2 G_2 - r^3 |G_3| \\ &\geq r^2 M_2 - r^3 M_3 = r^2 (M_2 - r M_3) > 0 \end{aligned}$$

次に $H(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ のときを考える。 F_2 は h, k に関する 2 次式なので, 演習問題 2.32 より原点の近くで $F_2 < 0$ となっている。 $F_2 + R_3 < 0$ が示されれば極大であることが分かる。

$r, u, v, G_2, G_3, N, M_3$ を先程と同じものとする。最大値定理より $G_2(u, v)$ は最大値 N_2 をとる。このとき任意の (u, v) に対し $G_2 \leq N_2$ が成立する。 G_2 も 2 次式で F_2 と同じ条件を満たすので $G_2 < 0$ であり, $N_2 < 0$ である。 r を $M_3 r < -N_2$ が成立するように十分小さくとると,

$$\begin{aligned} F_2 + R_3 &= r^2 G_2 + r^3 G_3 \leq r^2 G_2 + r^3 |G_3| \\ &\leq r^2 N_2 + r^3 M_3 = r^2 (N_2 - r M_3) < 0 \end{aligned}$$

最後に $H(a, b) < 0$ の場合を考える。演習問題 2.32 より半径 1 の円周上の点 $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ で $G_2(u_1, v_1) > 0, G_2(u_2, v_2) < 0$ となる点が存在する。 r を十分小さくとって

$$r M_3 < G_2(u_1, v_1), \quad r M_3 < -G_2(u_2, v_2)$$

の両方が成立するようにしておく。このとき $(x_1, y_1) = (r u_1, r v_1), (x_2, y_2) = (r u_2, r v_2)$ とおくと

$$\begin{aligned} F_2(x_1, y_1) + R_3(x_1, y_1) &\geq r^2 G_2(u_1, v_1) - r^3 M_3 \geq r^2 (G_2(u_1, v_1) - r M_3) > 0 \\ F_2(x_2, y_2) + R_3(x_2, y_2) &\leq r^2 G_2(u_2, v_2) + r^3 M_3 \leq r^2 (G_2(u_2, v_2) + r M_3) < 0 \end{aligned}$$

となるので (a, b) は極点ではない。

演習問題 2.34 次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$

(2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$

(4) $z = x^3 - 3xy + y^3$

$$(5) z = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

$$(6) z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$(7) z = \frac{ax + by}{x^2 + y^2 + 1} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

$$(8) z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2) \quad (a > b > 0)$$

(1) (a) 最初に臨界点 ($z_x = 0$ かつ $z_y = 0$ となる点) を求める。 $z_x = 2x - y - 2, z_y = -x + 2y + 3$ なので連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解くと $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}$ が得られる。(b) 次にヘッシアンを計算する。 $z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = -1$ なので $H(x, y) = 2^2 - (-1)^2 = 3 > 0, z_{xx} > 0$ である。よって z は $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ で極小値 $-\frac{4}{3}$ をとる。

(2) 同様に計算すると $\left(-\frac{1}{17}, \frac{3}{17}\right)$ が臨界点であるが、 $H(x, y) = -17 < 0$ である。臨界点が極値を与えないので極値は存在しない。

(3) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 3x^2 + 2y^2 - 6x, \quad z_y = 4xy - 6y$$

なので $z_y = 0$ より $y(2x - 3) = 0$ となるので、 $y = 0$ または $2x - 3 = 0$ となる。 $y = 0$ のとき

$$z_x(x, 0) = 3x^2 + 2 \cdot 0^2 - 6x = 3x^2 - 6x = 0$$

を得る。よって $y = 0$ のときは $x = 0$ または $x = 2$ である。

$x = \frac{3}{2}$ のとき

$$z_x\left(\frac{3}{2}, y\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2y^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

を得る。よって $y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ である。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (2, 0), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

である。

$$z_{xx} = 6x - 6, \quad z_{xy} = 4y, \quad z_{yy} = 4x - 6$$

なので

$$H(x, y) = 12(x - 1)(2x - 3) - 16y^2$$

となる。よって

$$H(0, 0) = 36 > 0, H(2, 0) = 12 > 0, H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0, H\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0$$

となる。よって極値を与える (x, y) は $(0, 0)$ と $(2, 0)$ である。 $z_{xx}(0, 0) = -6 < 0, z_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ なので $(0, 0)$ では極大、 $(2, 0)$ では極小である。

(4) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = -3x + 3y^2$$

なので $z_x = 0$ から $z_y = 0$ を引くことにより

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - y^2 - y + x = (x^2 - y^2) + (x - y) \\ &= (x - y)(x + y) + (x - y) \\ &= (x - y)(x + y + 1) \end{aligned}$$

を得る。よって $x = y$ または $x + y = -1$ が成立する。

最初に $x + y = -1$ が成立している場合を考える。 $y = -1 - x$ を $x = y^2$ に代入すると、 $x = (1 + x)^2$ より $x^2 + x + 1 = 0$ を得る。この2次方程式は実数解を持たないので、この場合は解はない。よって $x = y$ が成立する。これをもとの方程式に代入すると $x = 0, 1$ が得られる。よって臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1)$$

である。

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = -3, \quad z_{yy} = 6y$$

なので

$$H(x, y) = 36xy - 9$$

となる。よって

$$H(0, 0) = -9 < 0, \quad H(1, 1) = 27 > 0$$

となる。よって極値を与える (x, y) は $(x, y) = (1, 1)$ である。 $z_{xx}(1, 1) = 6 > 0$ なので $(1, 1)$ で極小である。

(5) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = y(x^2 + y^2 - 1) + 2x^2y, \quad z_y = x(x^2 + y^2 - 1) + 2xy^2$$

なので $z_x = 0$ から $z_y = 0$ を引くことにより

$$\begin{aligned} 0 &= (y - x)(x^2 + y^2 - 1) + 2xy(x - y) = (y - x)(x^2 + y^2 - 1) - 2xy(y - x) \\ &= (y - x)(x^2 + y^2 - 1 - 2xy) = (y - x)((x - y)^2 - 1) \\ &= (y - x)(x - y - 1)(x - y + 1) \end{aligned}$$

を得る。よって $x = y$ または $x - y - 1 = 0$ または $x - y + 1 = 0$ が成立する。

最初に $x = y$ が成立している場合を考える。

$$\begin{aligned} 0 &= z_x(x, x) = x(x^2 + x^2 - 1) + 2x^3 = x(4x^2 - 1) \\ &= x(2x - 1)(2x + 1) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = \pm \frac{1}{2}$ となる。よってこの場合

$$(x, y) = (0, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

である。

次に $x - y - 1 = 0$ の場合を考える。 $y = x - 1$ なので

$$\begin{aligned} 0 = z_y(x, x-1) &= x(x^2 + (x-1)^2 - 1) + 2x(x-1)^2 = x(x^2 + (x-1)^2 - 1 + 2(x-1)^2) \\ &= x(4x^2 - 6x + 2) = 2x(2x^2 - 3x + 1) \\ &= 2x(2x-1)(x-1) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = \frac{1}{2}$ または $x = 1$ となる。今の場合 $y = x - 1$ なので

$$(x, y) = (0, -1), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, 0)$$

である。

最後に次に $x - y + 1 = 0$ の場合を考える。 $y = x + 1$ なので

$$\begin{aligned} 0 = z_y(x, x+1) &= x(x^2 + (x+1)^2 - 1) + 2x(x+1)^2 = x(x^2 + (x+1)^2 - 1 + 2(x+1)^2) \\ &= x(4x^2 + 6x + 2) = 2x(2x^2 + 3x + 1) \\ &= 2x(2x+1)(x+1) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = -\frac{1}{2}$ または $x = -1$ となる。今の場合 $y = x + 1$ なので

$$(x, y) = (0, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (-1, 0)$$

である。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$$

である。

$$z_{xx} = 6xy, \quad z_{xy} = 3x^2 + 3y^2 - 1, \quad z_{yy} = 6xy$$

なので

$$H(x, y) = 36x^2y^2 - (3x^2 + 3y^2 - 1)^2$$

となる。よって

$$H(0, 0) = -1 < 0, H(0, \pm 1) = -4 < 0, H(\pm 1, 0) = -4 < 0, H\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = 2 > 0, H\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

となる。よって極値を与える (x, y) は $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$ である。

$$z_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = z_{xx}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) > 0, \quad z_{xx}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = z_{xx}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) < 0$$

なので $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ で極小であり, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で極大である。

(6) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

なので $z_x = 0$ と $z_y = 0$ を加えて 4 で割ると

$$0 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

を得る。よって $x + y = 0$ または $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立する。

最初に $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立している場合を考える。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

より $x = 0, y = 0$ を得る。これは $z_x(0, 0) = 0, z_y(0, 0) = 0$ を満たしている。

次に $x + y = 0$ の場合を考える。 $y = -x$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 = z_x(x, -x) &= 4x^3 - 4x - 4x = 4(x^3 - 2x) \\ &= 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = \sqrt{2}$ または $x = -\sqrt{2}$ となる。今の場合

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

となる。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

である。

$$z_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z_{xy} = 4, \quad z_{yy} = 12y^2 - 4$$

なので

$$H(x, y) = 16(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 16$$

となる。よって

$$H(0, 0) = 0, \quad H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 384 > 0$$

となる。 $z_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ なので $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で極小である。

$(x, y) = (0, 0)$ はこれだけではよく分からない。最初に $y = x$ 上での z の動きを見よう。 $g(x) = z(x, x)$ とおくと

$$g(x) = 2x^4$$

となるので $x = 0$ で極小である。よって $(0, 0)$ の十分近くの点 (x, y) で (今の場合 $y = x$ を満たしている) , $z(x, y) > z(0, 0)$ となる点がある。

次に $y = -x$ 上での z の動きを見よう。 $h(x) = z(x, -x)$ とおくと

$$h(x) = 2x^4 - 8x^2$$

となる。 $h(x)$ の増減表を書いて $x = 0$ のまわりの状況を調べると、 $y = -x$ 上では極大になっている。よって $(0, 0)$ の十分近くの点 (x, y) で (今の場合 $y = -x$ を満たしている)、 $z(x, y) < z(0, 0)$ となる点がある。十分近くに $z(0, 0)$ より大きい点も小さい点もあるので、 z は $(0, 0)$ で極値をとらない。

以上により $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ および $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で極小値をとる。

$$(7) \quad z_x = \frac{a}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(ax + by)x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad z_y = \frac{b}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(ax + by)y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \quad \text{なので臨界点は}$$

連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ の解である。 $z_x = 0$ より $x = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}a$ となる。また $z_y = 0$

より $y = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}b$ となる。 $k = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}$ とおくと $x = ka, y = kb$ となる。これを

$z_x(x^2 + y^2 + 1)^2 = a(x^2 + y^2 + 1) - 2(ax + by)x = 0$ に代入して

$$a((a^2 + b^2)k^2 + 1) - 2(a^2 + b^2)ak^2 = 0$$

を得る。これを解くと $k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ となるので、臨界点は

$$(x, y) = \left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

である。

$$H(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \frac{2(ax^3 - 3y^2ax - 3ax + 3byx^2 - by^3 - by)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & \frac{2(3axy^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \\ \frac{2(3axy^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & \frac{2(3byx^2 - by^3 + 3by - 3y^2ax + ax^3 + ax)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \end{array} \right|$$

となる。 $k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ($\varepsilon = \pm 1$) とおくと

$$H\left(\frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \left| \begin{array}{cc} -\varepsilon \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} & 0 \\ 0 & -\varepsilon \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{array} \right| = \frac{a^2 + b^2}{4} > 0$$

である。 $z_{xx}\left(\frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = -\varepsilon \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ より $(x, y) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

は極小値を、 $(x, y) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ は極大値を与える。極値は

$$z\left(\frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{\varepsilon \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

である。

(8) $z_x = -2xe^{-(x^2 + y^2)}(ax^2 + by^2) + 2e^{-(x^2 + y^2)}ax, z_y = -2ye^{-(x^2 + y^2)}(ax^2 + by^2) + 2e^{-(x^2 + y^2)}by$ となっている。連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解く。 $e^{-(x^2 + y^2)} \neq 0$ なので

$$z_x = 0 \iff x = 0 \vee a - (ax^2 + by^2) = 0, \quad z_y = 0 \iff y = 0 \vee b - (ax^2 + by^2) = 0$$

となっている。場合分けを実行する。(a) $x = 0$, (b) $a - (ax^2 + by^2) = 0$, (c) $y = 0$, (d) $b - (ax^2 + by^2) = 0$, とすると,

$$\left((a) \vee (b) \right) \wedge \left((c) \vee (d) \right) = \left((a) \wedge (c) \right) \vee \left((a) \wedge (d) \right) \vee \left((b) \wedge (c) \right) \vee \left((b) \wedge (d) \right)$$

となる。

(1) (a) \wedge (c) のとき：この場合は $x = 0$ かつ $y = 0$ なので解は $(x, y) = (0, 0)$ である。

(2) (a) \wedge (d) のとき： $x = 0$ を $b - (ax^2 + by^2) = 0$ に代入すると、 $b(1 - y^2) = 0$ となる。 $b \neq 0$ より $1 - y^2 = 0$ 、よって $y = \pm 1$ となる。この場合解は $(x, y) = (0, \pm 1)$ である。

(3) (b) \wedge (c) のとき： $y = 0$ を $a - (ax^2 + by^2) = 0$ に代入すると、 $a(1 - x^2) = 0$ となる。 $a \neq 0$ より $1 - x^2 = 0$ 、よって $x = \pm 1$ となる。この場合解は $(x, y) = (\pm 1, 0)$ である。

(4) (b) \wedge (d) のとき： $a = ax^2 + by^2 = b$ となるので $a = b$ となり、 $a > b$ に矛盾する。よってこの場合解はない。

以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$$

となる。

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2 - by^2 + 2x^4a + 2x^2by^2 + a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2 - 5by^2 + 2y^2ax^2 + 2y^4b + b) \end{vmatrix}$$

なので

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0$$

$$H(0, 1) = \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0$$

$$H(0, -1) = \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0$$

$$H(1, 0) = \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0$$

$$H(-1, 0) = \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0$$

となる。よって z は $(x, y) = (0, 0)$ で極小値 $z(0, 0) = 0$ 、 $(x, y) = (\pm 1, 0)$ で極大値 $z(\pm 1, 0) = \frac{a}{e}$ をとる。

演習問題 2.35 命題 2.33 を証明せよ。

領域の点は境界上にあるか内部にあるかのいずれかである。内部にあるときは広義の極大値になっている。そのとき命題 2.27 より臨界点である。

演習問題 2.36

(1) $x + y + z = a$ ($a > 0$) のとき $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ における x^3y^3z の最大値を求めよ。

- (2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ における $z = f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)x^2y$ の最大値を求めよ。
 (3) $f(x, y) = (x+1)^2 + (y+1)^2$, $D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ とする。 D における $f(x, y)$ の最大値を求めよ。
 (4) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。
 (5) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

- (1) $z = a - x - y$ と考え, $f(x, y) = x^3y^3z = x^3y^3(a - x - y)$ の最大値を求める。
 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ の条件

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

を x, y についての条件に書き直すと

$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a$$

となる。よって $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a\}$ 上で $f(x, y) = x^3y^3(a - x - y)$ の最大値を求めればよい。

D は有界閉集合であり, $f(x, y)$ は連続なので, D 上で $f(x, y)$ は最大値をとる。その点は境界上にあるか, 内部の臨界点である。境界上では $f(x, y) = 0$ となる。内部の臨界点を調べる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^3(a - x - y) - x^3y^3 = x^2y^3(3a - 4x - 3y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^3y^2(a - x - y) - x^3y^3 = x^3y^2(3a - 3x - 4y) \end{aligned}$$

$x = 0, y = 0$ は境界なので, 内部で $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満たすのは $x = \frac{3a}{7}, y = \frac{3a}{7}$ である。

$$f\left(\frac{3a}{7}, \frac{3a}{7}\right) = \frac{3^6 a^7}{7^7}$$

なので最大値は $\frac{3^6 a^7}{7^7}$ である。

- (2) D は有界閉集合であり, $f(x, y)$ は連続なので最大値が存在する。その点は境界上にあるか, 内部の臨界点である。

境界上では $1 - x^2 - y^2 = 0$ なので $f(x, y) = 0$ である。

次に内部の臨界点を求める。

$$z_x = 2xy(1 - 2x^2 - y^2), \quad z_y = x^2(1 - x^2 - 3y^2)$$

なので連立方程式

$$xy(1 - 2x^2 - y^2) = 0, \quad x^2(1 - x^2 - 3y^2) = 0 \quad (3)$$

の解を求める。

$x = 0$ は連立方程式 (3) の解になっている。このとき $f(0, y) = 0$ である。

よって $x \neq 0$ とする。このとき連立方程式 (3) は次の連立方程式と同値である。

$$y(1 - 2x^2 - y^2) = 0, \quad 1 - x^2 - 3y^2 = 0 \quad (4)$$

$y = 0$ の場合を考える。 $y = 0$ のとき $x = \pm 1$ なので、境界上の点である。よって $y \neq 0$ とする。
このとき連立方程式 (4) は次の連立方程式と同値である。

$$1 - 2x^2 - y^2 = 0, \quad 1 - x^2 - 3y^2 = 0 \quad (5)$$

これをとくと $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{25\sqrt{5}} \quad f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{25\sqrt{5}}$$

これらの中で最も大きいのは $f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{25\sqrt{5}}$ である。よって最大値は $\frac{4}{25\sqrt{5}}$ である。

(3) D は有界閉集合であり、 $f(x, y)$ は連続なので最大値が存在する。その点は境界上にあるか、内部の臨界点である。

臨界点を求める。 $f_x = 2(x+1), f_y = 2(y+1)$ なので臨界点は $(x, y) = (-1, -1)$ である。臨界点での値は

$$f(-1, -1) = 0$$

である。

$L_1 = \{(x, 2) \mid -2 \leq x \leq 2\}, L_2 = \{(x, -2) \mid -2 \leq x \leq 2\}, L_3 = \{(2, y) \mid -2 \leq y \leq 2\}, L_4 = \{(-2, y) \mid -2 \leq y \leq 2\}$ とおくと

$$\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$$

である。

L_1 では $y = 2$ なので $f(x, y) = f(x, 2) = (x+1)^2 + 3^2$ である。 $-2 \leq x \leq 2$ より L_1 上では $x = 2$ のとき最大であり、 $f(2, 2) = 18$ である。

L_2 では $y = -2$ なので $f(x, y) = f(x, -2) = (x+1)^2 + 1^2$ である。 $-2 \leq x \leq 2$ より L_2 上では $x = 2$ のとき最大であり、 $f(2, -2) = 10$ である。

L_3 では $x = 2$ なので $f(x, y) = f(2, y) = 3^2 + (y+1)^2$ である。 $-2 \leq y \leq 2$ より L_3 上では $y = 2$ のとき最大であり、 $f(2, 2) = 18$ である。

L_4 では $x = -2$ なので $f(x, y) = f(-2, y) = 1^2 + (y+1)^2$ である。 $-2 \leq y \leq 2$ より L_4 上では $y = 2$ のとき最大であり、 $f(-2, 2) = 10$ である。

以上により境界上では $(x, y) = (2, 2)$ のとき最大値 $f(2, 2) = 18$ をとる。

よって最大値は $f(2, 2) = 18$ である。

(4) このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを a, b, c とする。 $s = \frac{a+b+c}{2}$ とおくと、3 角形の面積 S は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

3 角形の各辺の長さを x, y, z とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを $2s$ とおくと、即ち $x+y+z = 2s$ ($s > 0$) が成立している。 x, y, z は辺の長さであるから $x > 0, y > 0, z > 0$ を満たしている。 x, y, z が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式、即ち $x+y > z, y+z > x, z+x > y$

が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき、3 辺の長さが x, y, z であるような 3 角形が存在する。 z を消去して x, y の不等式から $x < s, y < s, x + y > s$ が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす x, y は最初の 6 つの不等式を満たす。

$\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq s, y \leq s, x + y \geq s\}$ とおく。ここで S が最大のとき S^2 が最大であり、逆も成立する。よって S^2 が最大になる場合を求めればよい。

$$f(x, y) = S^2 = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$$

とおき、 \bar{D} 上で $f(x, y)$ の最大値を求める。 \bar{D} は有界閉集合であり、 $f(x, y)$ は \bar{D} 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は $f(x, y) = 0$ となる。よって内部で最大値をとる。この点は臨界点なので臨界点を求める。

$$f_x = s(s-x)(s-y) - s(s-y)(x+y-s) = 0$$

$$f_y = s(s-x)(s-y) - s(s-x)(x+y-s) = 0$$

を解いて $(x, y) = (0, s), (s, 0), (s, s), \left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$ が得られる。この中に最大値を与える点が存在する。 $f(0, s) = 0, f(s, 0) = 0, f(s, s) = 0, f\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) = \frac{s^4}{27}$ なので最大値を与える点は $(x, y) = \left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$ である。このとき $x = y = z = \frac{2s}{3}$ なので 3 角形は正 3 角形である。以上により正 3 角形するとき面積最大になる。

(5) 定円を点 O を中心とする半径 r の円とする。円に内接する 3 角形を ABC とする。角 $\angle AOB = s, \angle BOC = t, \angle COA = u$ とおくと $s+t+u = 2\pi$ が成立している。最大面積を求めるので、 ABC は O を含んでいるとしてよい。このとき ABC が 3 角形をなす条件は $0 < s < \pi, 0 < t < \pi, 0 < u < \pi$ である。この不等式が定義する領域を D とすると $D = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s < \pi, t < \pi, s + t > \pi\}$ となる。

3 角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t))$$

なので、 $\bar{D} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \leq \pi, t \leq \pi, s + t \geq \pi\}$ 上で

$$z = f(s, t) = \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t))$$

の最大値を求める問題になる。

\bar{D} は有界閉集合であり、 $f(s, t)$ は \bar{D} 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

最初に境界上での関数の値を考える。 $L_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s = \pi, 0 \leq t \leq \pi\}$, $L_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq \pi, t = \pi\}$, $L_3 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq \pi, s + t = \pi\}$ とおくと $\partial\bar{D} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ である。 L_1 上で z は

$$\begin{aligned} z = f(\pi, t) &= \frac{1}{2}r^2 (\sin \pi + \sin t + \sin(2\pi - \pi - t)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin t + \sin(\pi - t)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin t + \sin t) = r^2 \sin t \end{aligned}$$

となるので, L_1 上で最大になるのは $(s, t) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。 L_2 上では

$$z = f(s, \pi) = r^2 \sin s$$

となるので, L_2 上で最大になるのは $(s, t) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ のときで値は $f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = r^2$ である。 L_3 上では $t = \pi - s$ なので

$$\begin{aligned} z &= f(s, \pi - s) = \frac{1}{2}r^2(\sin s + \sin(\pi - s) + \sin(2\pi - \pi)) \\ &= \frac{1}{2}r^2(\sin s + \sin(\pi - s)) \\ &= \frac{1}{2}r^2(\sin s + \sin s) = r^2 \sin s \end{aligned}$$

となる。 L_3 上で最大になるのは $(s, t) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。以上により境界上での最大値は r^2 で $(s, t) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ でとることが分かる。

次に臨界点を調べる。

$$z_s = \frac{1}{2}r^2(\cos s - \cos(2\pi - s - t)), \quad z_t = \frac{1}{2}r^2(\cos t - \cos(2\pi - s - t))$$

なので臨界点では $\cos s - \cos(2\pi - s - t) = 0$ かつ $\cos t - \cos(2\pi - s - t) = 0$ が成立している。これより $\cos s = \cos t$ が得られる。 $0 \leq s \leq \pi$ かつ $0 \leq t \leq \pi$ であるが, この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = t$ が成立する。 $t = s$ を代入して $\cos s = \cos(2\pi - 2s)$ を得る。

$\pi \leq s+t \leq 2\pi$ より, $\pi \leq 2s \leq 2\pi$ が成立している。 $-2\pi \leq -2s \leq -\pi, 0 \leq 2\pi - 2s \leq \pi$ と変形できる。この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = 2\pi - 2s$ が成立する。よって臨界点は $(s, t) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ である。

$$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 > r^2 = f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

なので f は $(s, t) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ で最大値をとる。 $s = t = u = \frac{2\pi}{3}$ なので最大になる 3 角形は正 3 角形である。

演習問題 *2.37 定理 2.35 を証明せよ。

$F_y(a, b) \neq 0$ なので $F_y(a, b) > 0$ の場合に証明する。 $F_y(a, b) < 0$ の場合も同様に証明できる(各自試みよ)。 $F_y(a, b) > 0$ なので (a, b) のある近傍 $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (a, b)) < \delta\}$ で $(x, y) \in U$ ならば $F_y(x, y) > 0$ となるものが存在する。以下点はすべて U 内にあるとする。 $F_y(a, b) > 0$ より $F(a, y)$ は y に関して単調増加である。 $F(a, b) = 0$ なので y_1, y_2 が存在して,

$$y_1 < b < y_2, \quad F(a, y_1) < F(a, b) = 0 < F(a, y_2)$$

を満たす。よって a のある近傍 $W = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ が存在して

$$\forall x \in W; F(x, y_1) < 0 < F(x, y_2)$$

を満たす。 $\forall x \in W$ に対し $F(x, y)$ は y に関し単調増加なので $F(x, y) = 0$ となる y が存在する。この y を $y = f(x)$ と定義すると, $F(x, f(x)) = 0$ かつ $b = f(a)$ となっている。 $x \in W$ に対し $y = f(x), k = f(x+h) - f(x)$ と置く。平均値の定理より

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = hF_x(x+\theta h, y+\theta k) + kF_y(x+\theta h, y+\theta k)$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。 $y = f(x)$ なので, $F(x, y) = 0$, $y+k = f(x+h)$ なので, $F(x+h, y+k) = 0$ が成立する。よって

$$0 = hF_x(x+\theta h, y+\theta k) + kF_y(x+\theta h, y+\theta k)$$

が成立する。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_x(x+\theta h, y+\theta k)}{F_y(x+\theta h, y+\theta k)} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \end{aligned}$$

$F_y(a_1, a_2, b) \neq 0$ なので $F_y(a_1, a_2, b) > 0$ の場合に証明する。 $F_y(a_1, a_2, b) < 0$ の場合も同様に証明できる (各自試みよう)。 $F_y(a_1, a_2, b) > 0$ なので (a_1, a_2, b) のある近傍

$$U = \{ (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid d((x_1, x_2, y), (a_1, a_2, b)) < \delta \}$$

で $(x_1, x_2, y) \in U$ ならば $F_y(x_1, x_2, y) > 0$ となるものが存在する。以下点はすべて U 内にあるとする。 $F_y(a_1, a_2, b) > 0$ より $F(a_1, a_2, y)$ は y に関して単調増加である。 $F(a_1, a_2, b) = 0$ なので y_1, y_2 が存在して,

$$y_1 < b < y_2, \quad F(a_1, a_2, y_1) < F(a_1, a_2, b) = 0 < F(a_1, a_2, y_2)$$

を満たす。よって (a_1, a_2) のある近傍 $W = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < \varepsilon \}$ が存在して

$$\forall (x_1, x_2) \in W; F(x_1, x_2, y_1) < 0 < F(x_1, x_2, y_2)$$

を満たす。 $\forall (x_1, x_2) \in W$ に対し $F(x_1, x_2, y)$ は y に関し単調増加なので $F(x_1, x_2, y) = 0$ となる y が存在する。この y を $y = f(x_1, x_2)$ と定義すると, $F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0$ かつ $b = f(a_1, a_2)$ となっている。 $(x_1, x_2) \in W$ に対し $y = f(x_1, x_2), k = f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)$ と置く。 x_2 は固定し x_1, y に関する 2 変数関数だとみなして平均値の定理を適用すると

$$F(x_1+h, x_2, y+k) - F(x_1, x_2, y) = hF_{x_1}(x_1+\theta h, x_2, y+\theta k) + kF_y(x_1+\theta h, x_2, y+\theta k)$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。 $y = f(x_1, x_2)$ なので, $F(x_1, x_2, y) = 0$, $y+k = f(x_1+h, x_2)$ なので, $F(x_1+h, x_2, y+k) = 0$ が成立する。よって

$$0 = hF_{x_1}(x_1+\theta h, x_2, y+\theta k) + kF_y(x_1+\theta h, x_2, y+\theta k)$$

が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{x_1}(x_1+\theta h, x_2, y+\theta k)}{F_y(x_1+\theta h, x_2, y+\theta k)} = - \frac{F_{x_1}(x_1, x_2, y)}{F_y(x_1, x_2, y)} \end{aligned}$$

変数 x_2 に関しても同様に示すことができる (各自試みよ)。

演習問題 2.38 次で与えられる陰関数に関し $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $F(x, y) = 1 - y + xe^y = 0$

(2) $F(x, y) = x^3y^3 + y - x = 0$

(3) $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$ (デカルトの正葉線)

(1) 式の両辺を x で微分すると

$$-y' + e^y + xe^y y' = 0 \tag{6}$$

となる。よって

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

となる。式 (6) の両辺を x で微分すると

$$-y'' + 2e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^3}$$

となる。

(2) 式の両辺を x で微分すると

$$3x^2y^3 + 3x^3y^2y' + y' - 1 = 0 \tag{7}$$

となる。よって

$$y' = \frac{1 - 3x^2y^3}{1 + 3x^3y^2}$$

となる。式 (7) の両辺を x で微分すると

$$6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2 + 3x^3y^2y'' + y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{6xy(9x^6y^6 + 3x^3y^4 - y^2 - 3x^4y^3 - 3xy - x^2)}{(1 + 3x^3y^2)^3}$$

となる。

(3) 式の両辺を x で微分すると

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0 \tag{8}$$

となる。よって

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

となる。式 (8) の両辺を x で微分すると

$$6x - 3y' - 3y' - 3xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0$$

となるので

$$2(x - y' + yy'^2) + (y^2 - x)y'' = 0$$

と変形する。

$$\begin{aligned} x - y' + yy'^2 &= x + y'(yy' - 1) = x + \frac{x^2 - y}{x - y^2} \left(y \frac{x^2 - y}{x - y^2} - 1 \right) \\ &= x \left(1 + \frac{(x^2 - y)(xy - 1)}{(x - y^2)^2} \right) = xy \left(\frac{x^3 - 3xy + y^3 + 1}{(x - y^2)^2} \right) \\ &= \frac{xy}{(x - y^2)^2} \quad (\text{変形の途中で } x^3 - 3xy + y^3 = 0 \text{ を使用}) \end{aligned}$$

なので

$$y'' = \frac{2xy}{(x - y^2)^3}$$

となる。

演習問題 2.39 $F(x, y) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 1$ とする。

(1) $F(x, y) = 0$ のとき x の動きうる範囲を求めよ。

(2) 点 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ において, $F(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = f(x)$ について $f'(0), f''(0)$ を求めよ。

(3) 点 $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ において, $F(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = f(x)$ について $f'(0), f''(0)$ を求めよ。

(1) $F(x, y) = 0$ を y に関する 2 次方程式と見る。 $F(x, y) = 0$ を満たす (x, y) が存在するとき, y に関する 2 次方程式は実数解を持つので判別式は正である。よって

$$D = (-2x)^2 - 4 \cdot 3(2x^2 - 1) \geq 0$$

を解いて

$$-\sqrt{\frac{3}{5}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{5}}$$

を得る。逆に x がこの条件をみたすとき $F(x, y) = 0$ を満たす (x, y) が存在する。

(2) $F(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると

$$4x - 2y - 2xy' + 6yy' = 0 \tag{9}$$

を得る。

f は $x = 0$ のとき $y = f(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ なので

$$4 \cdot 0 - 2 \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 \cdot 0 \cdot f'(0) + 6 \frac{1}{\sqrt{3}} f'(0) = 0$$

より $f'(0) = \frac{1}{3}$ となる。

式 (9) を x で微分すると

$$4 - 2y' - 2y' - 2xy'' + 6y'^2 + 6yy'' = 0$$

をえる。 f は $x = 0$ のとき $y = f(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(0) = \frac{1}{3}$ なので

$$4 - 2\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} - 2 \cdot 0 \cdot f''(0) + 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6\frac{1}{\sqrt{3}}f''(0) = 0$$

より $f''(0) = -\frac{5\sqrt{3}}{9}$

(3) $F(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると

$$4x - 2y - 2xy' + 6yy' = 0 \quad (10)$$

を得る。

f は $x = 0$ のとき $y = f(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ なので

$$4 \cdot 0 - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 2 \cdot 0 \cdot f'(0) + 6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)f'(0) = 0$$

より $f'(0) = \frac{1}{3}$ となる。

式 (10) を x で微分すると

$$4 - 2y' - 2y' - 2xy'' + 6y'^2 + 6yy'' = 0$$

をえる。 f は $x = 0$ のとき $y = f(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f''(0) = \frac{1}{3}$ なので

$$4 - 2\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} - 2 \cdot 0 \cdot f''(0) + 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)f''(0) = 0$$

より $f''(0) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$

演習問題 2.40 $F(x, y)$ は C^2 級で, $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ とする。 (a, b) の近傍で $F(x, y)$ が定める陰関数を $y = f(x)$ とするとき次の問に答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で極小であるという条件「 $f'(a) = 0, f''(a) > 0$ 」を $F(x, y)$ に関する条件に直せ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で極大であるという条件「 $f'(a) = 0, f''(a) < 0$ 」を $F(x, y)$ に関する条件に直せ。

$z = G(x, y)$ と $y = g(x)$ から $z = G(x, g(x))$ を合成し, これを x で微分した $\frac{dz}{dx}$ は $z = G(x, y)$ と $x = x, y = g(x)$ の合成と考えて 2 変数の合成関数の微分法を用いると

$$\frac{dz}{dx} = G_x + G_y g'(x) \quad (11)$$

となる。

よって $F(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0 \quad (12)$$

が得られる。式 (12) の両辺をさらに x で微分すると

$$\begin{aligned} & (F_x)_x(x, f(x)) + (F_x)_y(x, f(x))f'(x) \\ & + \left((F_y)_x(x, f(x)) + (F_y)_y(x, f(x))f'(x) \right) f'(x) + F_y(x, f(x))f''(x) = 0 \end{aligned}$$

となる。 $F_{xy} = F_{yx}$ を用いると

$$F_{xx} + 2F_{xy}f'(x) + F_{yy}(f'(x))^2 + F_yf''(x) = 0 \quad (13)$$

(1) $x = a$ を式 (12) に代入すると

$$F_x(a, f(a)) + F_y(a, f(a))f'(a) = 0$$

なので $f'(a) = 0$ という条件は $F_x(a, f(a)) = 0$ という条件になる。また $x = a$ を式 (13) に代入し, $f'(a) = 0$ を用いると

$$F_{xx}(a, f(a)) + F_y(a, f(a))f''(a) = 0$$

となる。『 $B \neq 0$ のとき $\frac{A}{B} > 0 \iff AB > 0$ 』なので $f''(a) > 0$ という条件は

$$F_{xx}(a, f(a))F_y(a, f(a)) < 0$$

という条件となる。よって $b = f(a)$ とすると

$$f'(a) = 0, f''(a) > 0 \iff F_x(a, b) = 0, F_{xx}(a, b)F_y(a, b) < 0$$

である。

(2) (1) と同様に考えると

$$f'(a) = 0, f''(a) < 0 \iff F_x(a, b) = 0, F_{xx}(a, b)F_y(a, b) > 0$$

となる。

演習問題 2.41 次の式が与えられているとき, x, y を独立変数, z を従属変数と見て, z_x, z_y, z_{xy} を求めよ。

(1) $1 + x + y + z + xyz = 0$

(2) $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = 1$

(1) 与式を x で微分すると

$$1 + z_x + yz + xyz_x = 0 \quad (14)$$

となる。これより $z_x = -\frac{1+yz}{1+xy}$ を得る。与式を y で微分すると

$$1 + z_y + xz + xyz_y = 0$$

となる。これより $z_y = -\frac{1+xz}{1+xy}$ を得る。

式 (14) を y で微分すると

$$z_{xy} + z + yz_y + xz_x + xyz_{xy} = 0$$

となる。これより

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{x+y+xyz-z}{(1+xy)^2} \\ &= \frac{-2z-1}{(1+xy)^2} \end{aligned}$$

を得る。

(2) 与式を x で微分すると

$$2x + 2y + 2zz_x = 0 \tag{15}$$

となる。これより $z_x = -\frac{x+y}{z}$ を得る。与式を y で微分すると

$$2x + 2y + 2zz_y = 0$$

となる。これより $z_y = -\frac{x+y}{z}$ を得る。

式 (15) を y で微分すると

$$1 + z_y z_x + z z_{xy} = 0$$

となる。

$$\begin{aligned} z z_{xy} &= -(1 + z_y z_x) = -\left(1 + \frac{x+y}{z} \frac{x+y}{z}\right) \\ &= -\frac{x^2 + 2xy + y^2 + z^2}{z^2} = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

より $z_{xy} = -\frac{1}{z^3}$ を得る。