解析学 I 問題解説 ♯11

河野

演習問題 3.3　命題 3.5 を証明せよ。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left(2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}} = \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\times\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}} = \frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

なので,

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり有理関数の積分に帰着できる。

演習問題 3.4　次を示せ。

$$-\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}+1} - \frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}-1} - 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \tan x - x$$

arctan は tan の逆関数なので $\arctan(\tan X) = X$ である。よって

$$2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) = 2\frac{x}{2} = x$$

である。

$$-\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}+1} - \frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}-1} = -\frac{\tan\dfrac{x}{2}-1+\tan\dfrac{x}{2}+1}{\left(\tan\dfrac{x}{2}+1\right)\left(\tan\dfrac{x}{2}-1\right)}$$

$$= -\frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{\tan^2\dfrac{x}{2}-1} = \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}$$

となるが tan の加法定理を用いると $\tan x$ になるので等式が成立する。

演習問題 3.5　次の関数の不定積分を求めよ。ただし (8)，(9) において $ab \neq 0$ とする。

(1) $\sin x \cos x$	(2) $\sin^3 x$	(3) $\dfrac{1}{\cos x}$
(4) $\dfrac{1}{\tan x}$	(5) $\dfrac{1}{1+\sin x}$	(6) $\dfrac{1}{\sin x - \cos x}$
(7) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$	(8) $\dfrac{1}{a + b\tan x}$	(9) $\dfrac{1}{a+b\sin x}$

(1)　**三角関数は積の形になっているときは和に直すことで積分が簡単になる場合が多い。** この問題の場合は和を積に直すことは倍角公式 $[\sin 2x = 2\sin x \cos x]$ に対応する。

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

(2)　積を和に直すことを繰り返し実行すると，または直接 3 倍角の公式を適用すると，

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

となるので。

$$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$$

別の方法として，$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ と見て $u = \cos x$ と変数変換してもできる。

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx = -\int \left\{1 - u^2\right\} du$$
$$= \frac{1}{3}u^3 - u = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$$

(3)　$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2} dt = \int \left\{\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right\} dt$$
$$= \log|1+t| - \log|1-t| = \log\left|1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \log\left|1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

(4)　$\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ なので $t = \sin x$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log|\sin x|$$

(5)　$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{1+\sin x} dx = \int \frac{1}{1 + \dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{(1+t)^2} dt$$
$$= -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1 + \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

(6)　$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\sin x-\cos x}\,dx=\int \frac{2}{t^2+2t-1}\,dt=\int \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}+1}-\frac{1}{t+\sqrt{2}+1}\right)dt$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}+1\right|-\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}+1\right|\right)$$

(7)　$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx=\int \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int \frac{2t}{1+t^2+1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\,dt$$
$$=\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt=\log(1+t^2)=\log\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

(8)　$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいても勿論できるが，$t=\tan x$ とおく。

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+t^2$$

より

$$I=\int \frac{1}{a+b\tan x}\,dx=\int \frac{1}{a+bt}\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

分母が 1 次式と 2 次式の積なので部分分数分解を実行する。

$$\frac{1}{a+bt}\frac{1}{1+t^2}=\frac{A}{a+bt}+\frac{B+Ct}{1+t^2}$$

とおく。右辺を通分して両辺を比較すると

$$A(1+t^2)+(B+Ct)(a+bt)=1$$

である。$t=-\dfrac{a}{b}$ を代入すると $A\left(1+\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2\right)=1$ より $A=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$ となる。

$$\frac{B+Ct}{1+t^2}=\frac{1}{a+bt}\frac{1}{1+t^2}-\frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{1}{a+bt}$$
$$=\frac{1}{a+bt}\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{a^2+b^2}{1+t^2}-\frac{b^2(1+t^2)}{1+t^2}\right)$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{1}{a+bt}\frac{a^2-b^2t^2}{1+t^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{1}{a+bt}\frac{(a-bt)(a+bt)}{1+t^2}$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{a-bt}{1+t^2}$$

よって

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{b^2}{a+bt}+\frac{a-bt}{1+t^2}\right)dt \\
&= \frac{b^2}{a^2+b^2}\int\frac{1}{a+bt}\,dt + \frac{a}{a^2+b^2}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt - \frac{b}{a^2+b^2}\int\frac{t}{1+t^2}\,dt \\
&= \frac{b}{a^2+b^2}\log|a+bt| + \frac{a}{a^2+b^2}\arctan t - \frac{b}{a^2+b^2}\frac{1}{2}\log(1+t^2)
\end{aligned}
$$

あとは $t=\tan x$ を代入すればよいのだが，ここでは式をもう少し整理しておこう。

$$\arctan t = \arctan(\tan x) = x$$

また

$$1+t^2 = 1+\tan^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

より

$$-\frac{1}{2}\log(1+t^2) = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\cos^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\cos^2 x\right) = \log\left(\cos^2 x\right)^{\frac{1}{2}} = \log|\cos x|$$

となる。これを代入すると

$$I = \frac{b}{a^2+b^2}\log|a\cos x + b\sin x| + \frac{a}{a^2+b^2}x$$

(9)　$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと積分は

$$I = \int\frac{1}{a+b\sin x}\,dx = \int\frac{1}{a+b\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{2}{at^2+2bt+a}\,dt$$

分母の 2 次式の判別式 (の $\frac{1}{4}$) を D とおくと $D=b^2-a^2$ である。$D>0$ のとき二次方程式は 2 つの実数解 α,β をもち分母は $a(t-\alpha)(t-\beta)$ と因数分解できる。このときは部分分数分解を実行すればよい。

$D<0$ のときは 1 次の項を消す変形後 $\displaystyle\int\frac{1}{1+s^2}\,ds$ に帰着させればよい。$D=0$ のときは分母が 1 次式の 2 乗になるので積分が求まる。計算過程を省略して結果だけ書くと

$D>0$ のとき

$$I = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left|a\tan\left(\frac{x}{2}\right)+b-\sqrt{b^2-a^2}\right| - \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left|a\tan\left(\frac{x}{2}\right)+b+\sqrt{b^2-a^2}\right|$$

$D<0$ のとき

$$I = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

$D=0$ のとき

$$I = -\frac{2}{a\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+b}$$

演習問題 3.6　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$　(3) $\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$　(5) $\sqrt{1-x^2}$

(1)　$\sqrt{2-3x^2}=\sqrt{3\left(\frac{2}{3}-x^2\right)}=\sqrt{3}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-x^2}$ と変形できるので $x=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t$ とおき置換積分を実行する。

$$\int\frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{3}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{3}}t=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

(2)　$3+2x-x^2=4-x^2+2x-1=2^2-(x-1)^2$ となるので $u=x-1$ とおくと積分は

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}}\,du$$

となる。$u=2\sin t$ とおいて置換積分を実行する。

$$I=\int dt=t=\arcsin\frac{u}{2}=\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

(3)　$\sqrt{3x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{3}\sqrt{x^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$ と変形できるので $x=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sin t}$ とおいて置換積分を実行する。$\dfrac{dx}{dt}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$，$\sqrt{3x^2-2}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{2}{3}}=\sqrt{2}\dfrac{\cos t}{\sin t}$ より

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}\,dx&=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sin t}\sqrt{2}\frac{\cos t}{\sin t}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)dt\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int dt=-\frac{1}{\sqrt{2}}t=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}x}\right)\end{aligned}$$

(4)　$x=2\tan t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{\cos^2 t}$ であり，$x^2+4=4(\tan^2 t+1)=\dfrac{4}{\cos^2 t}$ なので，積分は

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\int\frac{\cos t}{2}\frac{2}{\cos^2 t}\,dt=\int\frac{1}{\cos t}\,dt$$

となる。前問 (3) より

$$=\log\left|1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|-\log\left|1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

となるので $t=\arctan\dfrac{x}{2}$ を代入して

$$=\log\left|1+\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right|-\log\left|1-\tan\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right|$$

(5)　$x=\sin t$ とおいて置換積分を実行する。途中 $\cos^2 t = \dfrac{\cos 2t+1}{2}$ を用いる。

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int \{\cos 2t + 1\}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cos t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$ に $t=\arcsin t$ を代入した，$\dfrac{1}{2}\arcsin x + \dfrac{1}{4}(\sin 2\arcsin x)$ も勿論正解である。

演習問題 3.7　次を示せ。

$$
\log\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \log\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| = \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|
$$

$$
\log\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \log\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| = \log\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\right|
$$

なので右辺の log の絶対値のなかを計算する。

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} &= \frac{\left(1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)\left(1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)}{\left(1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)\left(1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)} = \frac{1+2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\dfrac{x-1}{x+1}}{1-\dfrac{x-1}{x+1}} \\
&= \frac{\dfrac{x+1}{x+1}+2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{x-1}{x+1}} = \frac{\dfrac{2x}{x+1}+2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{\dfrac{2}{x+1}} \\
&= \frac{x+1}{2}\left(\frac{2x}{x+1}+2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = x+\sqrt{(x+1)^2\frac{x-1}{x+1}} \\
&= x+\sqrt{(x+1)(x-1)} = x+\sqrt{x^2-1}
\end{aligned}
$$

演習問題 3.8　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　(3) $\sqrt{x^2+2}$

(4) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

(1)　$\sqrt{1-x^2}=t(x+1)$ または同じことだが $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおいて置換積分を実行する。両辺を 2 乗して，$t^2=\dfrac{1-x}{1+x}$ となる。x について解くと $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を得る。$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}$ であ

り，$\sqrt{1-x^2}=t(x+1)=t\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\dfrac{2t}{1+t^2}$ となる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{2t}\left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)dt = -2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= -2\arctan t = -2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\end{aligned}$$

(2)　$\sqrt{x^2+1}=t-x$ とおいて置換積分を実行する。両辺を 2 乗すると $x^2+1=t^2-2tx+x^2$ であり，これを x について解くと，$x=\dfrac{t^2-1}{2t}$ となる，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+1}{2t^2}$ であり $\sqrt{x^2+1}=t-x=t-\dfrac{t^2-1}{2t}=\dfrac{1+t^2}{2t}$ となる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt \\ &= \log|t| = \log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\end{aligned}$$

(3)　$\sqrt{x^2+2}=t-x$ とおいて置換積分を実行する。両辺を 2 乗すると $x^2+2=t^2-2tx+x^2$ であり，これを x について解くと，$x=\dfrac{t^2-2}{2t}$ となる，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+2}{2t^2}$ であり $\sqrt{x^2+2}=t-x=t-\dfrac{t^2-2}{2t}=\dfrac{t^2+2}{2t}$ となる。

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2}\,dx &= \int \frac{t^2+2}{2t}\frac{t^2+2}{2t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int\left\{t+\frac{4}{t}+\frac{4}{t^3}\right\}dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2+4\log\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)-\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2}\right)\end{aligned}$$

(4)　$\sqrt{4-x^2}=t(x+2)$ または同じことだが $t=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ とおいて置換積分を実行する。$t^2=\dfrac{2-x}{2+x}$ より $x=\dfrac{2-2t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{8t}{(1+t^2)^2}$，$\sqrt{4-x^2}=t(x+2)=\dfrac{4t}{1+t^2}$ となる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx &= -\int\left(\frac{1+t^2}{2-2t^2}\right)^2\frac{1+t^2}{4t}\frac{8t}{(1+t^2)^2}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}\right\}dt \\ &= -\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)} = -\frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}\end{aligned}$$

演習問題 3.9　$x\geq 1$ のとき $I_2=\pi+I_1$ を示せ。

不定積分の結果が正しいとすれば

$$F(x)=2\arctan(x+\sqrt{x^2-1})+\arcsin\frac{1}{x}$$

とおけば $F'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = 0$ となるので $F(x)$ は定数である。$x = 1$ を代入すると

$$F(1) = 2\arctan(1 + \sqrt{1^2 - 1}) + \arcsin\frac{1}{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

となり示されるが，これは積分の結果を使っているので方法に不満がある。ここでは積分の結果を使わないで逆三角関数の性質を用いて示そう。

$a = \arctan(x + \sqrt{x^2-1})$ とおくと $x + \sqrt{x^2-1} = \tan a$ $(-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2})$ である。また $b = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{x}$ とおくと $\dfrac{1}{x} = \sin 2b$ $(-\dfrac{\pi}{2} \leq 2b \leq \dfrac{\pi}{2})$ である。

$$\frac{\pi}{2} - b = a$$

を示せばよい。今 $x \geq 1$ より $b > 0$ である。よって $0 \leq \dfrac{\pi}{2} - b < \dfrac{\pi}{2}$ が成立している。このとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \tan a$$

が示されれば証明が終わる。

$x = \dfrac{1}{\sin 2b}$ より

$$\begin{aligned}
\tan a = x + \sqrt{x^2-1} &= \frac{1}{\sin 2b} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2b} - 1} = \frac{1}{\sin 2b} + \sqrt{\frac{\cos^2 2b}{\sin^2 2b}} \\
&= \frac{1}{\sin 2b} + \frac{\cos 2b}{\sin 2b} = \frac{\cos^2 b + \sin^2 b}{2\sin b\cos b} + \frac{\cos^2 b - \sin^2 b}{2\sin b\cos b} \\
&= \frac{2\cos^2 b}{2\sin b\cos b} = \frac{\cos b}{\sin b}
\end{aligned}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos b - \cos\frac{\pi}{2}\sin b}{\cos\frac{\pi}{2}\cos b + \sin\frac{\pi}{2}\sin b} = \frac{\cos b}{\sin b}$$

よって $\tan a = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - b\right)$ が示された。

演習問題 3.10　今までは学んだ事に対応する演習問題で，演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚 (?) を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない (?)。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$	(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$	(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$
(4) $x\arcsin x$	(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$	(6) xe^{-x}
(7) $x\cos x$	(8) $x^2\sin x$	(9) e^{3x+1}
(10) $2x\arctan x$	(11) $\log(2x+1)$	(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$
(13) $x^2\log x$	(14) xe^{2x^2+3}	(15) $\dfrac{e^x}{x} + e^x\log x$

(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$　(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$　(18) $\cos^n x\sin x$

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$　(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$　(21) $\sin(\log x)$

(22) x^3e^x　(23) x^4e^x　(24) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$

(25) $\dfrac{1}{1+x^2}$　(26) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$　(27) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(28) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$　(29) $\dfrac{1}{\sin x\cos^5 x}$　(30) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$

(31) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$　(32) $\dfrac{1}{3+\cos x}$　(33) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$

(34) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$　(35) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(36) $\sqrt{x^2-1}$

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$　(38) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$　(39) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(40) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$　(41) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$　(42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(43) $\dfrac{1}{4+x^2}$　(44) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$　(45) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(46) $3x^2e^{x^3+1}$　(47) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$　(48) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(49) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$　(50) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$　(51) $\dfrac{3}{x^3-1}$

(52) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$　(53) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$　(54) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

(55) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$　(56) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$　(57) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

(58) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$　(59) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$　(60) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$

(61) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$　(62) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　(63) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$

(64) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$　(65) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$　(66) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$

(67) $\dfrac{12}{x^3-8}$　(68) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$　(69) $\sin 4x$

(70) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$　(71) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$　(72) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$

(73) $\log(1+\sqrt{x})$　(74) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$　(75) $3x^2(x^3+5)^6$

(76) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$　(77) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(78) $e^{ax}\cos bx$

(79) $e^{ax}\sin bx$

問題が長いので解説の前に被積分関数をもう一度書いておく。

(1)　$\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$: いきなり「ルートのなかの 2 次式」を解く方法でやってもできるが, $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} =$

$\dfrac{-x+x^3}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-x\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x\sqrt{1-x^2}$ と変形してから考えたほうが簡単かもしれない。$t=1-x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=-2x$ である。

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx&=\int\left\{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x\sqrt{1-x^2}\right\}dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{t}}-x\sqrt{t}\right)\left(-\frac{1}{2x}\right)dt\\&=\frac{1}{2}\int\left\{\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}dt=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{3}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{3}\end{aligned}$$

(2)　$\cos^2 x-\sin^2 x$：三角関数の積は和に直すというのが一般的な考え方だが，この場合は加法定理の形そのものである。

$$\int\left\{\cos^2 x-\sin^2 x\right\}dx=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x$$

(3)　$\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$：$\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^{3/2}}$ と見ると $u=1+x^2$ と置けばよいことに気づくだろう。

$$\int\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\,du=-\frac{1}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(4)　$x\arcsin x$：部分積分法。

$$I=\int x\arcsin x\,dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\arcsin x\,dx=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

となるが，第 2 項の積分は $x=\sin t$ とおくと

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx&=\int\sin^2 t\,dt=\int\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\sin t\cos t\\&=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

となるので

$$I=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$$

(5)　$\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$：部分積分を 2 回，一般的な形を後の (78) で考える。

$$\begin{aligned}I&=\int e^{-3x}\cos 2x\,dx=\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\cos 2x\,dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x-\frac{2}{3}\int e^{-3x}\sin 2x\,dx\\&=-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x-\frac{2}{3}\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\sin 2x\,dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{-3x}\sin 2x-\frac{4}{9}I\end{aligned}$$

となるので，整理すると

$$I=\frac{1}{13}\left(-3e^{-3x}\cos 2x+2e^{-3x}\sin 2x\right)$$

(6)　xe^{-x}：部分積分法。

$$\int xe^{-x}\,dx = \int x\left(-e^{-x}\right)'\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

(7)　$x\cos x$：部分積分法。

$$\int x\cos x\,dx = \int x\left(\sin x\right)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$$

(8)　$x^2\sin x$：部分積分法 2 回。

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= \int x^2\left(-\cos x\right)'\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx\\ &= -x^2\cos x + \int 2x\left(\sin x\right)'\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\end{aligned}$$

(9)　e^{3x+1}：簡単な置換積分法。$t = 3x+1$ とおく。

$$\int e^{3x+1}\,dx = \int \frac{1}{3}e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{3x+1}$$

(10)　$2x\arctan x$：部分積分法。

$$I = \int 2x\arctan x\,dx = \int \left(x^2\right)'\arctan x\,dx = x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

ここで

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int \left\{1 - \frac{1}{1+x^2}\right\}\,dx = x - \arctan x$$

なので

$$I = x^2\arctan x - x + \arctan x$$

(11)　$\log(2x+1)$：簡単な置換積分法 + 部分積分法。$t = 2x+1$ とおく。

$$\int \log(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \log t\,dt = \frac{1}{2}\left(t\log|t| - t\right) = \frac{1}{2}\left((2x+1)\log|2x+1| - (2x+1)\right)$$

(12)　$\dfrac{1}{x(\log x)^n}$：$\dfrac{1}{x(\log x)^n} = (\log x)'\dfrac{1}{(\log x)^n}$ と考えると…。$t = \log x$ とおく。$n = 1$ のときは

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log|\log x|$$

$n \neq 1$ のときは

$$\int \frac{1}{x(\log x)^n}\,dx = \int \frac{1}{t^n}\,dt = \frac{t^{1-n}}{1-n} = \frac{(\log x)^{1-n}}{1-n}$$

(13) $x^2\log x$：部分積分法。

$$\int x^2\log x\,dx=\int\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\log x\,dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{3}\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3$$

(14) xe^{2x^2+3}：置換積分法。$t=2x^2+3$ とおく。

$$\int xe^{2x^2+3}\,dx=\int\frac{1}{4}e^t\,dt=\frac{1}{4}e^{2x^2+3}$$

(15) $\dfrac{e^x}{x}+e^x\log x$：一方の関数を部分積分すると他の関数と打ち消しあって…。

$$\begin{aligned}\int\frac{e^x}{x}+e^x\log x\,dx&=\int\frac{e^x}{x}\,dx+\int(e^x)'\log x\,dx=\int\frac{e^x}{x}\,dx+e^x\log x-\int\frac{e^x}{x}\,dx\\&=e^x\log x\end{aligned}$$

(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ ： この様な問題の場合試行錯誤でやるしかない。色々な置き方を試してうまくいくものを探す。まず思いつくのは $t=\dfrac{x}{x+1}$ とおくことだろう。しかしこれを実行すると (各自計算してみること), $\displaystyle\int\frac{2t}{(1-t^2)^2}\arcsin\sqrt{t}\,dt$ となりこの積分は難しそうである。そこで $t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおくと $\displaystyle\int t\frac{2\sin t}{\cos^3 t}\,dt$ となる。$(\tan^2 t)'=\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}$ に気が付くと部分積分を実行して…。

$t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおくと $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}=\sin t$ より $\dfrac{x}{x+1}=\sin^2 t$ である。これを x について解くと $x=\dfrac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}=\tan^2 t$ である。$dx=(\tan^2 t)'dt$ より

$$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx=\int t\left(\tan^2 t\right)'\,dt=t\tan^2 t-\int\tan^2 t\,dt$$

となる。

$$\begin{aligned}\int\tan^2 t\,dt&=\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,dt=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt=\int\left\{\frac{1}{\cos^2 t}-1\right\}\,dx\\&=\tan t-t\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx&=t\tan^2 t-\tan t+t\\&=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\end{aligned}$$

(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$：$(2x+1)\sin(x^2+x+1)=(x^2+x+1)'\sin(x^2+x+1)$ なので…。$t=x^2+x+1$ とおく。

$$\int(2x+1)\sin(x^2+x+1)\,dx=\int\sin t\,dt=-\cos t=-\cos(x^2+x+1)$$

(18) $\cos^n x \sin x$: $\cos^n x \sin x = -\cos^n x (\cos x)'$ なので…。
$t = \cos x$ とおく。

$$\int \cos^n x \sin x \, dx = -\int t^n \, dt = -\frac{1}{n+1} t^{n+1} = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x$$

(19) $(ax^2 + bx + c)e^x$: 部分積分法 2 回。

$$\int (ax^2 + bx + c)e^x \, dx = \int (ax^2 + bx + c) (e^x)' \, dx = (ax^2 + bx + c)e^x - \int (2ax + b) (e^x)' \, dx$$
$$= (ax^2 + bx + c)e^x - (2ax + b)e^x + \int 2ae^x \, dx = (ax^2 + (b - 2a)x + c - b + 2a)e^x$$

(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1 - x^2)^{3/2}}$: (16) で述べたように，どう変数変換するかは試行錯誤でやるしかない。少し積分に慣れれば，$\arcsin x$ を消すという考え方でも,「ルートの中の 2 次式」という見方からも，次のようにおくのは気がつくと思う。この解説を見なくても自分でできた人はかなり積分に精通しつつあるといえる。
$t = \arcsin x$ とおくと，$x = \sin t$ より $1 - x^2 = \cos^2 t$ である。

$$\int \frac{\arcsin x}{(1 - x^2)^{3/2}} \, dx = \int \frac{t}{\cos^2 t} \, dt = \int t \, (\tan t)' \, dt = t \tan t - \int \tan t \, dt$$
$$= t \tan t + \log |\cos t| = \frac{t \sin t}{\cos t} + \frac{1}{2} \log |\cos t|^2$$
$$= \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \log |1 - x^2|$$

(21) $\sin(\log x)$: $t = \log x$ とおき $\displaystyle\int e^t \sin t \, dt$ と変形。(79) 参照。

$$I = \int e^t \sin t \, dt = \int (e^t)' \sin t \, dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t \, dt$$
$$= e^t \sin t - e^t \cos t + \int e^t \sin t \, dt = e^t \sin t - e^t \cos t + I$$

となるので

$$\int \sin(\log x) \, dx = \frac{x \left(\sin(\log x) - \cos(\log x)\right)}{2}$$

(22) $x^3 e^x$: 部分積分。

$$\int x^3 e^x \, dx = \int x^3 \, (e^x)' \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \int 6x e^x \, dx\right)$$
$$= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) e^x$$

(23) $x^4 e^x$: 部分積分。

$$\int x^4 e^x \, dx = x^4 e^x - \int 4x^3 e^x \, dx = \left(x^4 - 4x^3\right) e^x + \int 12x^2 e^x \, dx$$
$$= \left(x^4 - 4x^3 + 12x^2\right) e^x - \int 24x e^x \, dx = \left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24\right) e^x$$

(24) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$：因数分解が問題。やり方は以前やった x^4+1 と同じで，$x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2-x^2$ と 2 乗の差にして因数分解を実行する。あとは有理関数の積分の定石で部分分数展開して…。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int\left\{\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}\right\}dx \\
&= \frac{1}{4}\bigl(\log(x^2+x+1)-\log(x^2-x+1)\bigr)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(25) $\dfrac{1}{1+x^2}$：$x=\tan t$ と置換積分。

$$
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int dt = t = \arctan x
$$

(26) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$：$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x^2+1}$ と部分分数展開。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right\}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\log|x+1|-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)
\end{aligned}
$$

(27) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」である。三角関数を用いる方法，無理式を用いる方法のどちらでもできるが，計算の難度は異なる。
$x=2\sin t$ とおく。

$$
\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int dt = t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)
$$

(28) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$：$I_n = \displaystyle\int \frac{1}{\cos^n x}dx$ とおき漸化式を求める。

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int\left\{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^n x}\right\}dx = I_{n-2}+\int \sin x\left(\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}x}\right)'dx \\
&= \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}}
\end{aligned}
$$

また

$$
I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (\tan x)'\,dx = \tan x
$$

漸化式を繰り返し適用すれば求まる。

$$
\begin{aligned}
I_8 &= \frac{6}{7}I_6+\frac{\sin x}{7\cos^7 x} = \frac{6}{7}\left(\frac{4}{5}I_4+\frac{\sin x}{5\cos^5 x}\right)+\frac{\sin x}{7\cos^7 x} \\
&= \frac{6}{7}\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}I_2+\frac{\sin x}{3\cos^3 x}\right)+\frac{6}{7}\frac{\sin x}{5\cos^5 x}+\frac{\sin x}{7\cos^7 x} \\
&= \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{\sin x}{3\cos^3 x}+\frac{6}{7}\frac{\sin x}{5\cos^5 x}+\frac{\sin x}{7\cos^7 x}
\end{aligned}
$$

(29) $\dfrac{1}{\sin x \cos^5 x}$: $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいても計算できるが計算が複雑になるので，他の方法がある場合はそれで計算したほうがよい。この場合は $t = \tan x$ とおいた方が計算は簡単である。一般に $\sin x$ と $\cos x$ の偶数乗，例えば $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$ などは $\tan x$ で表すことができる。

$t = \tan x$ とおくと $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos^5 x} \cos^2 x \, dt = \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} \, dt$ となる。$\sin x \cos x = \dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{\dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{t}{1+t^2}$， $\cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$

となるので $I = \displaystyle\int \frac{(1+t^2)^2}{t} \, dt$ となる。

$$I = \int \frac{1}{\sin x \cos^5 x} \, dx = \int \left\{ \frac{1}{t} + 2t + t^3 \right\} dt = \log|\tan x| + \tan^2 x + \frac{1}{4} \tan^4 x$$

(30) $\dfrac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)}$: これは $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくしかないようである。$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1+t^2}{2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $1 + \sin x = \dfrac{(1+t)^2}{1+t^2}$, $1 + \cos x = \dfrac{2}{1+t^2}$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} \, dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{(1+t)^2}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2} \frac{2}{1+t^2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

(31) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$: t=$a - x$ とおくと…。

$$\int \frac{x}{\sqrt{a-x}} \, dx = \int \frac{a-t}{\sqrt{t}(-1)} \, dt = \frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a-x}$$

(32) $\dfrac{1}{3 + \cos x}$: $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\int \frac{1}{3 + \cos x} \, dx = \int \frac{1}{t^2 + 2} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{x}{2}\right)$$

(33) $\dfrac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x}$: $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} \, dx &= \int \frac{2t}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2(t+1)} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{2t}{(t+1)(1+t^2)} \, dt \\ &= \int \left\{ \frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} \right\} dt = \frac{1}{2} \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + \frac{x}{2} - \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right|\end{aligned}$$

(34) $\dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^4}$: $t = e^x$ とおくと，$\displaystyle\int \frac{t^3}{(t^2+1)^4} \, dt$ となる。$\dfrac{t^3}{(t^2+1)^4} = \dfrac{t^3 + t}{(t^2+1)^4} - \dfrac{t}{(t^2+1)^4} = \dfrac{t}{(t^2+1)^3} - \dfrac{t}{(t^2+1)^4}$ なので…。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(e^x + e^{-x})^4} \, dx &= \int \left\{ \frac{t}{(t^2+1)^3} - \frac{t}{(t^2+1)^4} \right\} dt = \frac{1}{6(t^2+1)^3} - \frac{1}{4(t^2+1)^2} \\ &= -\frac{3e^{2x} + 1}{12\left(e^{2x} + 1\right)^3}\end{aligned}$$

(35) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

(36) $\sqrt{x^2-1}$ ：「ルートの中の 2 次式」。

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$$

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \log\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)$$

(38) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。$x = \tan t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$，$1+x^2 = 1+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\cos t \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dx = -\frac{1}{\sin t}$$

$x = \tan t$, $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ なので

$$= -\frac{1}{\tan t\cos t} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$t = \arctan x$ を直接代入して $-\dfrac{1}{\sin(\arctan x)}$ でも正解である。

(39) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。
$x = \tan t$ とおく。

$$I = \int \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \cos^3 t\left(1-\frac{\sin 2t}{\cos^2 t}\right)\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int\left\{\cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right\}dt$$
$$= \int\left\{\cos t - \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\right\}dt = \int\left\{2\cos t - \frac{1}{\cos t}\right\}dt = 2\sin t - \int\frac{1}{\cos t}\,dt$$

$J = \displaystyle\int \frac{1}{\cos t}\,dt$ は $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ として計算してもよいが，変数を x に戻すと

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) \quad なので$$
$$I = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$

(40) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。$x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ なので $u=x+1$ とおき，更に $u=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin t}$ とおく。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx &= -\int\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{2}\cos t}\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int dt\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right)\end{aligned}$$

(41) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。$x=a\tan t$ とおくと，$I=\dfrac{1}{a^4}\displaystyle\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt$ となるので $u=\sin t$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}\,dx &= \frac{1}{a^4}\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt = \frac{1}{a^4}\int\frac{\cos t(1-\sin^2 t)}{\sin^4 t}\,dt = \frac{1}{a^4}\int\left\{\frac{1}{u^4}-\frac{1}{u^2}\right\}du\\ &= \frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{3u^2}\right) = \frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{3\sin^3 t}\right)\end{aligned}$$

ここで $x=a\tan t$，$\sqrt{x^2+a^2}=\dfrac{a}{\cos t}$ より $\dfrac{1}{\sin t}=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$ なので

$$=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x}-\frac{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}{3a^4x^3}$$

(42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$ ：$t=\sqrt{1+x^6}$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}\,dx &= \frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{6}\int\left\{\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right\}dt\\ &= \frac{1}{6}\left(\log|t-1|-\log|t+1|\right) = \frac{1}{6}\left(\log\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)-\log\left(\sqrt{1+x^6}+1\right)\right)\end{aligned}$$

(43) $\dfrac{1}{4+x^2}$ ：$x=2\tan t$ とおくと…

$$\int\frac{1}{4+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(44) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ ：$t=\sqrt[3]{x+1}$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx &= \int\frac{3t^2}{1+t}\,dt = 3\int\left\{t-1+\frac{1}{1+t}\right\}dt\\ &= \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\log\left((x+1)^{\frac{1}{2}}+1\right)\end{aligned}$$

(45) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ ：これは有理関数の積分。部分分数展開して…。

$\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{g(x)}{(x^2+1)^2}$ ($g(x)$ は 3 次式) とおき $A,B,g(x)$ を求める。

右辺を通分して分子を比較すると

$$x(x^2+3)=A(x+1)(x^2+1)^2+B(x-1)(x^2+1)+g(x)(x-1)(x+1)$$

与式に $x=1$ を代入すると $A=\dfrac{1}{2}$，$x=-1$ を代入すると $B=\dfrac{1}{2}$ が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{(x^2+1)^2}&=\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}=\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}-\frac{x}{x^2-1}\\&=\frac{-x}{x^2-1}\frac{x^2+3-(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x}{x^2-1}\frac{(x^2-1)(x^2+2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x(x^2+2)}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{-x\big((x^2+1)+1\big)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

より

$\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}\int\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx&=\int\left\{\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\left(\log|x+1|+\log|x+1|-\log(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}\right)\end{aligned}$$

(46) $3x^2e^{x^3+1}$：典型的な置換積分。慣れてきた人は見た瞬間に分かると思う。

$$\int 3x^2e^{x^3+1}\,dx=e^{x^3+1}$$

(47) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$：これは有理関数の積分。

$\dfrac{1}{x^3(x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{g(x)}{x^3}$ ($g(x)$ は 2 次式) とおき，$A,g(x)$ を求める。右辺を通分して分子を比較すると

$$1=Ax^3+g(x)(x+1)$$

与式に $x=-1$ を代入すると $A=-1$ を得る。

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x^3}&=\frac{1}{x^3(x+1)}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^3(x+1)}+\frac{x^3}{x^3(x+1)}=\frac{x^3+1}{x^3(x+1)}\\&=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^3(x+1)}=\frac{x^2-x+1}{x^3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{x^3(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ と部分分数展開できるので

$$\int\frac{1}{x^3(x+1)}\,dx=\log|x|-\log|x+1|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$$

(48) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$：これも有理関数の積分。ただし部分分数展開の後 $\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$ の積分が出てくるので，分母の次数を下げる変形が必要になる。$n=1,a=\sqrt{2}$ なので次数を下げる式は

$$J_2=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+J_1\right)$$

となる。$\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{g(x)}{(x^2+2)^2}$ ($g(x)$ は 3 次式) とおき，$A, g(x)$ を求める。右辺を通分して分子を比較すると

$$2x^2+x+4 = A(x^2+2)^2 + g(x)x$$

$x=0$ を代入すると $A=1$ を得る。

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(2x^2+x+4-(x^2+2)^2\right) = -x^3-2x+1 = -x(x^2+2)+1$$

より $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+2} + \dfrac{1}{(x^2+2)^2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}\,dx &= \int \left\{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{(x^2+2)^2}\right\} dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

(49) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$: と部分分数展開する。$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ 等を分母の次数を下げて計算するので，分母の次数を下げる変形が必要になる。$J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ とすると $J_3 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{(x^2+1)^2} + 3J_2\right)$，$J_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1} + J_1\right)$ である。

$x^4-x^3-3x^2-x$ を x^2+1 で割って行くと

$$x^4-x^3-3x^2-x = (x^2+1)^2 - (x+5)(x^2+1) + 4$$

なので $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3} = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x+5}{(x^2+1)^2} + \dfrac{4}{(x^2+1)^3}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}\,dx &= \int \left\{\frac{1}{x^2+1} - \frac{x+5}{(x^2+1)^2} + \frac{4}{(x^2+1)^3}\right\} dx \\ &= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx - 5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx + 4\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx \\ &= J_1 + \frac{1}{2(x^2+1)} - 5J_2 + 4J_3 = J_1 + \frac{1}{2(x^2+1)} - 5J_2 + \left(\frac{x}{(x^2+1)^2} + 3J_2\right) \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + J_1 - 2J_2 \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + J_1 - \left(\frac{x}{x^2+1} + J_1\right) \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}\end{aligned}$$

(50) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$: これも有理関数の積分，分母を因数分解して…。
$f(x) = x^4-x^3-x+1$ とおくと $f(1)=0$ なので $x-1$ を因数に持つ。$x-1$ で割った結果の多項式も $x-1$ で $x=1$ を解にもつので $f(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)$ と因数分解できる。

$$\frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1} = \frac{(x^4-x^3-x+1)+3x}{x^4-x^3-x+1} = 1 + \frac{3x}{x^4-x^3-x+1}$$

$\dfrac{3x}{x^4-x^3-x+1} = \dfrac{f(x)}{(x-1)^2} + \dfrac{g(x)}{x^2+x+1}$ ($f(x), g(x)$ は 1 次式) とおき，$f(x), g(x)$ を求める。右辺を通分して分子を比較して

$$3x = f(x)(x^2+x+1) + g(x)(x-1)^2 \tag{10}$$

式 (10) に $x=1$ を代入して $f(1)=1$ を得る。式 (10) の両辺を x で微分して

$$3 = f'(x)(x^2+x+1) + f(x)(2x+1) + g'(x)(x-1)^2 + g(x)2(x-1) \tag{11}$$

式 (11) に $x=1$ を代入して $3 = 3f'(1) + 3f(1)$ より $f'(1)=0$ を得る。$f(x)=1$ より $g(x)=1$, よって $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1} = 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2+x+1}$ と部分分数展開できる。$x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ なので $t = x + \dfrac{1}{2}$ とおくと $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$ となるので

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}\,dx &= \int \left\{1 + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}\right\} dx \\ &= x - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(51) $\dfrac{3}{x^3-1}$: これも有理関数の積分。$\dfrac{3}{x^3-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{g(x)}{x^2+x+1}$ ($g(x)$ は 1 次式) とおく。右辺を通分して分子を比較すると

$$3 = A(x^2+x+1) + g(x)(x-1)$$

$x=1$ を代入して $A=1, g(x) = -(x+2)$ を得る。$x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ なので $t = x+\dfrac{1}{2}$ とおくと $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$ となる。

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x^3-1}\,dx &= \int \left\{\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right\} dx \\ &= \log|x-1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)\end{aligned}$$

(52) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$: $t = e^x$ とおくと，$I = \displaystyle\int \frac{1}{t^2+3t+4} dt$ となるので…。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+4e^{-x}+3}\,dx = \int \frac{1}{t^2+3t+4}\,dt &= \int \frac{1}{(t+\frac{3}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\,dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(e^x+\frac{3}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(53) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$: $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいてもできるが (29) で述べた方法でもできる。$t = \tan x$

とおくと…。

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 3\cos^2 x}\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$= \int \frac{t^2}{4+t^2}\frac{1}{1+t^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \left\{\frac{4}{4+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right\}dt$$
$$= \frac{1}{3}\left(4\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) - \arctan(\tan x)\right)$$
$$= \frac{2}{3}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) - \frac{x}{3}$$

(54) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$: $t = e^x$ とおくと…。

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t = \arctan(e^x)$$

(55) $\dfrac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$:倍角公式で 2 倍角の形に直した方が計算は簡単かもしれない。$t = \cos 2x$ とおく。

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x + 1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)$$

(56) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$: $t = \sqrt{1-x}$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{1-x}$$

(57) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$: $t = \sqrt{x}$ とおくと…。

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = 2(t - \arctan t) = 2\sqrt{x} - 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)$$

(58) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$: $t = \tan x$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{2-\tan^2 x}\,dx = \int \frac{1}{(2-t^2)(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{3}\int \left\{\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2-2}\right\}dt$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{6\sqrt{2}}\int \left\{\frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-\sqrt{2}}\right\}dt$$
$$= \frac{1}{3}\arctan t + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\log|t+\sqrt{2}| - \log|t-\sqrt{2}|\right)$$
$$= \frac{1}{3}x + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\log|\arctan x + \sqrt{2}| - \log|\arctan x - \sqrt{2}|\right)$$

(59) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ ：「ルートの中の 2 次式」$x = 2\sin t$ とおく。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int dt = t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(60) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ ： $\dfrac{\cos x}{\sin^n x} = \dfrac{(\sin x)'}{\sin^n x}$ と見て…。

$$\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx = \frac{\sin^{1-n} x}{1-n}$$

(61) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{1-x^2} = t(x+1)$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx &= -2\int \frac{1}{t^2+3}\,dt = -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\end{aligned}$$

(62) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ：「ルートの中の 2 次式」$\sqrt{x^2-1} = t - x$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \log\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$$

(63) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$ ： $\dfrac{\log(\log x)}{x} = (\log x)'\log(\log x)$ なので $t = \log x$ とおくと…。

$$\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx = \int \log t\,dt = t\log t - t = \log x\log(\log x) - \log x$$

(64) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ ： $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{(a^3+x^3)'}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ と見て $t = a^3+x^3$ とおくと…。

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \frac{1}{2}\left(a^3+x^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

(65) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$ ：$t = \sqrt{1-x}$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,dx &= 2\int \frac{1}{t^2-2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left\{\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right\}dt\\ &\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{2}\right) - \log\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(66) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$ ：$t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}\,dx &= -4\int \frac{t^2}{t^4-1}\,dx = \int\left\{\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \frac{2}{1+t^2}\right\}dt\\ &= \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right) - \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\end{aligned}$$

(67) $\dfrac{12}{x^3-8}$ ：有理関数の積分。

$$\int \frac{12}{x^3-8}\,dx = \int \left\{ \frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{x^2+2x+4} \right\} dx$$
$$= \log|x-2| - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

(68) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ ：$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと⋯。

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)}\,dt = \int \left\{ \frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right\} dt$$
$$= 2\arctan t + \frac{2}{t+1} = x - \frac{2}{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+1}$$

(69) $\sin 4x$ ：簡単な置換積分。$t = 4x$ とおく。

$$\int \sin 4x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin t\,dt = \frac{1}{4}\cos 4x$$

(70) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$ ：$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと⋯。

$$\int \frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}\,dx = \int \frac{t^2+1}{(t^2+4)(t-1)(t+1)}\,dt = \frac{1}{5}\int \left\{ \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{3}{t^2+4} \right\} dt$$
$$= \frac{1}{5}\left(\log|t-1| - \log|t+1| + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{5}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right| - \frac{1}{5}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| + \frac{3}{10}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

(71) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$ ：$t = \arctan x$ とおき，$I = \displaystyle\int t(\tan t - t)'dt$ 変形して部分積分。

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx = \int t\tan^2 t\,dt = \int t\left(\tan t - t\right)'\,dt = t\left(\tan t - t\right) - \int \left\{\tan t - t\right\}\,dt$$
$$= t\left(\tan t - t\right) + \log|\cos t| + \frac{1}{2}t^2$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\arctan^2 x + \log|\cos\arctan x|$$

(72) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$ ：$\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x} = -\dfrac{(\cos x)'}{3+\tan^2 x}$ と見る。$\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ は cos で表されるので $t = \cos x$ とおくと⋯。

$$\int \frac{\sin x}{3+\tan^2 x}\,dx = -\int \frac{t^2}{2t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\,dt - \frac{1}{2}\int dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{1}{2}t$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\cos x\right) - \frac{1}{2}\cos x$$

(73) $\log(1+\sqrt{x})$: $t=\sqrt{x}$ とおくと…。

$$\int \log(1+\sqrt{x})\,dx = 2\int t\log(t+1)\,dt = \int (t^2)'\log(t+1)\,dt = t^2\log(t+1) - \int \frac{t^2}{t+1}\,dt$$
$$= t^2\log(t+1) - \int \left\{t-1+\frac{1}{t+1}\right\}\,dt$$
$$x\log(\sqrt{x}+1)$$

(74) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$: $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおくと $t^2=\dfrac{1-x}{1+x}$ より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$…。

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = -\int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{4}{(1+t^2)^2}\,dt - \int \frac{4}{1+t^2}\,dt$$

漸化式 $J_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{t^2+1}+J_1\right)$ を用いて

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2\arctan t = (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(75) $3x^2(x^3+5)^6$: 展開して計算しても勿論できるが，$t=x^3+5$ とおくと…。

$$\int 3x^2(x^3+5)^6\,dx = \int t^6\,dt = \frac{(x^3+5)^7}{7}$$

(76) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{2+x-x^2}=t(2-x)$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}\,dx = \int \frac{2}{4t^2+1}\,dt = \arctan\left(2\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}\right)$$

(77) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$: $x=a\sin t$ とおくと…。

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int \sin^2 t\,dt = a^2\int \left\{\frac{1-\cos 2x}{2}\right\}\,dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$$

(78) $e^{ax}\cos bx$:

(79) $e^{ax}\sin bx$: 2 つまとめて考える。

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

とおく。部分積分を行うことにより

$$I_1=\int\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)'\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_2$$

を得る。同様に

$$I_2 = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} I_1$$

が分かるので，連立方程式を解いて

$$I_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} \bigl(a e^{ax} \cos bx + b e^{ax} \sin bx \bigr), \quad I_2 = \frac{1}{a^2 + b^2} \bigl(a e^{ax} \sin bx - b e^{ax} \cos bx \bigr)$$