

演習問題 3.13 命題 3.13 を証明せよ。

演算子を

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

とし, 微分方程式を

$$Ly = 0 \tag{1}$$

とする。微分の線型性より $D(ay) = aDy$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(ay) = D(D(ay)) = D(aDy) = aD(Dy) = aD^2y$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(ay) = aD^ky$ が成立する。よって

$$\begin{aligned} L(ay) &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))(ay) \\ &= a_n(x)D^n(ay) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(ay) + \cdots + a_1(x)D(ay) + a_0(x)(ay) \\ &= aa_n(x)D^ny + aa_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + aa_1(x)Dy + aa_0(x)y \\ &= a(a_n(x)D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y) \\ &= a(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y \\ &= aLy \end{aligned}$$

が成立する。よって y が線型微分方程式 (1) の解ならば ay も (1) の解である。

微分の線型性より $D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(y_1 + y_2) = D(D(y_1 + y_2)) = D(Dy_1 + Dy_2) = DDy_1 + DDy_2 = D^2y_1 + D^2y_2$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(y_1 + y_2) = D^ky_1 + D^ky_2$ が成立する。よって

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)D^n(y_1 + y_2) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(y_1 + y_2) + \cdots + a_1(x)D(y_1 + y_2) + a_0(x)(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)(D^ny_1 + D^ny_2) + a_{n-1}(x)(D^{n-1}y_1 + D^{n-1}y_2) + \cdots + a_1(x)(Dy_1 + Dy_2) + a_0(x)(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)D^ny_1 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_1 + \cdots + a_1(x)Dy_1 + a_0(x)y_1 \\ &\quad + a_n(x)D^ny_2 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_2 + \cdots + a_1(x)Dy_2 + a_0(x)y_2 \\ &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y_1 \\ &\quad + (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y_2 \\ &= Ly_1 + Ly_2 \end{aligned}$$

が成立する。よって y_1 および y_2 が線型微分方程式 (1) の解ならば $y_1 + y_2$ も (1) の解である。

演習問題 3.14 次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

$$(1) y' + y \sin x = 0$$

$$(3) y' + e^{2x}y = 0$$

$$(5) y'' - y' - 6y = 0$$

$$(7) y'' + 4y = 0$$

$$(9) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$(2) y' + (x+1)y = 0$$

$$(4) y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$(6) y'' + y = 0$$

$$(8) y'' - 2y' + y = 0$$

(1) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + \sin x)y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int \sin x dx = -\cos x$ より

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} = D + \sin x$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} y = 0$$

となる。両辺に左から $e^{-\cos x}$ をかけると

$$D(e^{-\cos x} y) = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-\cos x} y = C$$

となるので

$$y = C e^{\cos x}$$

である。

(2) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + (x+1))y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) = D + (x+1)$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$ をかけると

$$D\left(\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y\right) = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = C$$

となるので

$$y = C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

である。

(3) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + e^{2x})y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = D + e^{2x}$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$ をかけると

$$D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = C$$

となるので

$$y = C \exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

である。

(4) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 5D + 6 = (D - 3)(D - 2)$ なので微分方程式は $(D - 3)(D - 2)y = 0$ となる。 $u = (D - 2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 3)u = 0$ である。

$$e^{3x} D e^{-3x} u = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x} D e^{-3x} u = 0$ と変形できる。 $v = e^{-3x} u$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると

$$v = C_1$$

となるので

$$u = v e^{3x} = C_1 e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D - 2)y = C_1 e^{3x}$$

となる。

$$e^{2x} D e^{-2x} = D - 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{2x} D e^{-2x} y = C_1 e^{3x}$ となるが、 $z = e^{-2x} y$ とおき両辺に左から e^{-2x} をかけると

$$Dz = C_1 e^x$$

となる。両辺を積分すると $z = C_1 e^x + C_2$ となるので一般解は

$$y = e^{2x} z = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

となる。

(5) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - D - 6 = (D - 3)(D + 2)$ なので微分方程式は $(D - 3)(D + 2)y = 0$ となる。 $u = (D + 2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 3)u = 0$ となる。

$$e^{3x} D e^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x} D e^{-3x} u = 0$ となるが、 $v = e^{-3x} u$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると

$$v = C_1$$

となるので

$$u = v e^{3x} = C_1 e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + 2)y = C_1 e^{3x}$$

となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2x} D e^{2x} y = C_1 e^{3x}$ となるが、 $z = e^{2x} y$ とおき両辺に左から e^{2x} をかけると

$$Dz = C_1 e^{5x}$$

となる。両辺を積分すると $z = \frac{C_1}{5} e^{5x} + C_2$ となるので

$$y = e^{-2x} z = \frac{C_1}{5} e^{3x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。 $\frac{C_1}{5}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。

(6) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 1 = (D - i)(D + i)$ なので微分方程式は $(D - i)(D + i)y = 0$ となる。 $u = (D + i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - i)u = 0$ となる。

$$e^{ix} D e^{-ix} = D - i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{ix} D e^{-ix} u = 0$ となるが、 $v = e^{-ix} u$ とおき両辺に左から e^{-ix} をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

$$u = v e^{ix} = C_1 e^{ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + i)y = C_1 e^{ix}$$

となる。

$$e^{-ix} D e^{ix} = D + i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-ix} D e^{ix} y = C_1 e^{ix}$ となるが、 $z = e^{ix} y$ とおき両辺に左から e^{ix} をかけると

$$Dz = C_1 e^{2ix}$$

となる。両辺を積分すると $z = \frac{C_1}{2i} e^{2ix} + C_2$ となるので

$$y = e^{-ix} z = \frac{C_1}{2i} e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。 $\frac{C_1}{2i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。

(7) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 4 = (D - 2i)(D + 2i)$ なので微分方程式は $(D - 2i)(D + 2i)y = 0$ となる。 $u = (D + 2i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 2i)u = 0$ となる。

$$e^{2ix} D e^{-2ix} = D - 2i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{2ix}De^{-2ix}u = 0$ となるが、 $v = e^{-2ix}u$ とおき両辺に左から e^{-2ix} をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

$$u = ve^{2ix} = C_1e^{2ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + 2i)y = C_1e^{2ix}$$

となる。

$$e^{-2ix}De^{2ix} = D + 2i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2ix}De^{2ix}y = C_1e^{2ix}$ となるが、 $z = e^{2ix}y$ とおき両辺に左から e^{2ix} をかけると

$$Dz = C_1e^{4ix}$$

となる。両辺を積分すると $z = \frac{C_1}{4i}e^{4ix} + C_2$ となるので

$$y = e^{-2ix}z = \frac{C_1}{4i}e^{2ix} + C_2e^{-2ix}$$

となる。 $\frac{C_1}{4i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1e^{2ix} + C_2e^{-2ix}$$

となる。

(8) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D + 1 = (D - 1)(D - 1)$ なので微分方程式は $(D - 1)(D - 1)y = 0$ となる。 $u = (D - 1)y$ とおくと u がみたず微分方程式は $(D - 1)u = 0$ となる。

$$e^xDe^{-x} = D - 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^xDe^{-x}u = 0$ となるが、 $v = e^{-x}u$ とおき両辺に左から e^{-x} をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

$$u = ve^x = C_1e^x$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D - 1)y = C_1e^x$$

となる。

$$e^xDe^{-x} = D - 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^x D e^{-x} y = C_1 e^x$ となるが、 $z = e^{-x} y$ とおき両辺に左から e^{-x} をかけると

$$Dz = C_1$$

となる。両辺を積分すると $z = C_1 x + C_2$ となるので一般解は

$$y = e^x z = C_1 x e^x + C_2 e^x$$

となる。

(9) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 4D + 4 = (D+2)(D+2)$ なので微分方程式は $(D+2)(D+2)y = 0$ となる。 $u = (D+2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+2)u = 0$ となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} u = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2x} D e^{2x} u = 0$ となるが、 $v = e^{2x} u$ とおき両辺に左から e^{2x} をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

$$u = v e^{-2x} = C_1 e^{-2x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2)y = C_1 e^{-2x}$$

となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} y = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2x} D e^{2x} y = C_1 e^{-2x}$ となるが、 $z = e^{2x} y$ とおき両辺に左から e^{2x} をかけると

$$Dz = C_1$$

となる。両辺を積分すると $z = C_1 x + C_2$ となるので一般解は

$$y = z e^{-2x} = C_1 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。

演習問題 3.15 次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y'' + y = 0$

(2) $y'' + \omega^2 y = 0$ ($0 \neq \omega \in \mathbb{R}$)

(3) $y'' - y' + y = 0$

(4) $y'' - 2y' + 2y = 0$

(1) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと、一般解として

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて変形する。

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

なので

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = C_1 (\cos x + i \sin x) + C_2 (\cos x - i \sin x) \\ &= (C_1 + C_2) \cos x + (iC_1 - iC_2) \sin x \end{aligned}$$

と変形できる。 $A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \cos x + A_2 \sin x$$

という表示が得られる。

(2) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと、一般解として

$$y = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x} = C_1 (\cos \omega x + i \sin \omega x) + C_2 (\cos \omega x - i \sin \omega x) \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega x + (iC_1 - iC_2) \sin \omega x \end{aligned}$$

と変形する。 $A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \cos \omega x + A_2 \sin \omega x$$

という表示が得られる。

(3) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと、一般解として

$$C_1 \exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) = \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ と変形してオイラーの公式を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 \exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + i \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x - i \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= (C_1 + C_2) \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + (iC_1 - iC_2) \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$

と変形する。 $A_1 = C_1 + C_2, A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + A_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

という表示が得られる。

(4) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと、一般解として

$$C_1 \exp((1+i)x) + C_2 \exp((1-i)x)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$\exp((1+i)x) = e^x e^{ix}$ と変形してオイラーの公式を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^x (\cos x + i \sin x) + C_2 e^x (\cos x - i \sin x) \\ &= (C_1 + C_2) e^x \cos x + (iC_1 - iC_2) e^x \sin x \end{aligned}$$

と変形する。 $A_1 = C_1 + C_2$, $A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 e^x \cos x + A_2 e^x \sin x$$

という表示が得られる。

演習問題 3.16 次が成立することを示せ。

2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり、 $\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

$\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$ より $\varphi(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$ が成立する。このとき

$$(D - \alpha)(D - \beta) = D(D - \beta) - \alpha(D - \beta) = DD - D\beta - \alpha D + \alpha\beta$$

となるが β は定数なので $D\beta = \beta D$ が成立するので

$$\begin{aligned} &= D^2 - \beta D - \alpha D + \alpha\beta = D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta \\ &= D^2 + aD + b \end{aligned}$$

が成立する。 $u = (D - \beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D - \alpha)u = 0$$

となる。 $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$ より $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ となるが、 $v = e^{-\alpha x} u$ とおき両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

$$u = ve^{\alpha x} = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D - \beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$ となるが、 $z = e^{-\beta x} y$ とおき両辺に左から $e^{-\beta x}$ をかけると

$$Dz = C_1 e^{(\alpha - \beta)x}$$

となる。

ここで場合分けを行う。最初に $\alpha \neq \beta$ のときを考える。両辺を積分すると

$$z = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x} + C_2$$

となるので

$$y = e^{\beta x} z = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。 $\frac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

$\alpha = \beta$ のときは $e^{(\alpha - \beta)x} = 1$ なので式は

$$Dz = C_1$$

となる。両辺を積分すると

$$z = C_1 x + C_2$$

となり

$$y = e^{\beta x} z = C_1 x e^{\beta x} + C_2 e^{\beta x}$$

を得る。このときは $\alpha = \beta$ なので一般解

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

と表示できる。

演習問題 3.17 次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。 $\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ ($\lambda_2 \neq 0$) とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

$\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると $\varphi(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$ が成立する。ただしここで $\alpha = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\beta = \lambda_1 - i\lambda_2$ とする。このとき

$$D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$$

が成立する。 $u = (D - \beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D - \alpha)u = 0$$

となる。 $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$ より $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ となるが、 $v = e^{-\alpha x} u$ とおき両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると

$$Dv = 0$$

となる。両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

$$u = v e^{\alpha x} = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D - \beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$ となるが、 $z = e^{-\beta x} y$ とおき両辺に左から $e^{-\beta x}$ をかけると

$$Dz = C_1 e^{(\alpha - \beta)x}$$

となる。今 $\alpha - \beta = 2i\lambda_2 \neq 0$ に注意して両辺を積分すると

$$z = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x} + C_2$$

となるので

$$y = z e^{\beta x} = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。 $\frac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。これは複素関数としての表示なので、これを書き直す。

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} = C_1 e^{(\lambda_1 + i\lambda_2)x} + C_2 e^{(\lambda_1 - i\lambda_2)x} \\ &= C_1 e^{\lambda_1 x} e^{i\lambda_2 x} + C_2 e^{\lambda_1 x} e^{-i\lambda_2 x} \\ &= C_1 e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x + i \sin \lambda_2 x) + C_2 e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x - i \sin \lambda_2 x) \\ &= (C_1 + C_2) e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + (iC_1 - iC_2) e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \end{aligned}$$

と変形する。 $C_1 + C_2, iC_1 - iC_2$ をあらためて C_1, C_2 に置き直すと

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

が得られる。

演習問題 3.18 次の微分方程式を解け。

(1) $\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

(2) $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\frac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$

(4) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \sin 2x$

(6) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

非同次型は直接演算子法でもできるし、講義で紹介した、同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることによってできる。ここでは2通りの方法を述べる。

(1) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。

$$e^{3x} D e^{-3x} = D - 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{3x} D e^{-3x} y = e^{2x}$$

となる。 $z = e^{-3x} y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz = e^{-x}$$

となる。両辺を x で積分すると

$$z = -e^{-x} + C$$

となるので

$$y = z e^{3x} = -e^{2x} + C e^{3x}$$

である。

同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることで解を求める。

同次型の一般解は e^{2x} を 0 に変更して同様に計算すればできるので省略する。各自計算すること。ここでは結果だけ使用する。 $(D - 3)y = 0$ の一般解は $y_1 = C e^{3x}$ である。

$(D - 3)y = e^{2x}$ の特殊解を $y_2 = A e^{2x}$ の形をしていると予想する。 $Dy_2 = 2A e^{2x}$ なので

$$(D - 3)y_2 = Dy_2 - 3y_2 = 2A e^{2x} - 3A e^{2x} = -A e^{2x} = e^{2x}$$

より, $A = -1$ なので特殊解は $y_2 = -e^{2x}$ である。よって求める解は

$$y = y_1 + y_2 = C e^{3x} - e^{2x}$$

である。

(2) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + 2)y = \sin x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-2x} D e^{2x} = D + 2$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-2x} D e^{2x} y = \sin x$$

となる。 $z = e^{2x} y$ とおき両辺に左から e^{2x} をかけると

$$Dz = e^{2x} \sin x$$

となる。両辺を x で積分すると

$$z = \frac{2}{5} e^{2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos x + C$$

となるので

$$y = z e^{-2x} = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + C e^{-2x}$$

である。

[解 2] $(D + 2)y = 0$ の一般解を y_1 とすると $y_1 = C e^{-2x}$ である (各自計算すること)。

$(D + 2)y = \sin x$ の特殊解 y_2 を $y_2 = A \sin x + B \cos x$ と予想する。

$$\begin{aligned} (D + 2)y_2 &= D y_2 + 2y_2 = A \cos x - B \sin x + 2A \sin x + 2B \cos x \\ &= (2A - B) \sin x + (A + 2B) \cos x \end{aligned}$$

である。これが $\sin x$ になるためには $2A - B = 1, A + 2B = 0$ であればよい。よって $A = \frac{2}{5}, B = -\frac{1}{5}$ となるので, $y_2 = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$ である。よって解は

$$y = y_1 + y_2 = C e^{-2x} + \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$$

である。

(3) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + 3)y = x^2 + x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-3x} D e^{3x} = D + 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-3x} D e^{3x} y = x^2 + x$$

となる。 $z = e^{3x} y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz = e^{3x} (x^2 + x)$$

となる。両辺を x で積分すると

$$z = \frac{1}{3}e^{3x}x^2 + \frac{1}{9}e^{3x}x - \frac{1}{27}e^{3x} + C$$

となるので

$$y = ze^{-3x} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27} + Ce^{-3x}$$

である。

[解 2] $(D+3)y=0$ の一般解を y_1 とすると $y_1 = Ce^{-3x}$ である (各自計算せよ)。

$(D+3)y = x^2 + x$ の特殊解 y_2 を $y_2 = Ax^2 + Bx + C$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D+3)y_2 &= Dy_2 + 3y_2 = 2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx + 3C \\ &= 3Ax^2 + (2A+3B)x + B + 3C = x^2 + x\end{aligned}$$

より $3A = 1, 2A + 3B = 1, B + 3C = 0$ を得る。これを解くと $A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{9}, C = -\frac{1}{27}$ より

$y_2 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$ となる。よって

$$y = y_1 + y_2 = Ce^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$$

である。

(4) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = x + 4$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = x+4$ となる。 $u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = x+4$ となる。

$$e^{-x}De^x = D+1$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-x}De^xu = x+4$ となるが、 $v = e^xu$ とおき両辺に左から e^x をかけると

$$Dv = (x+4)e^x$$

となる。両辺を積分すると

$$v = xe^x + 3e^x + C_1$$

となるので

$$u = ve^{-x} = x + 3 + C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y = x + 3 + C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D-3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = x + 3 + C_1e^{-x}$ となるが、 $z = e^{-3x}y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz = xe^{-3x} + 3e^{-3x} + C_1e^{-4x}$$

となる。両辺を積分すると

$$z = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{10}{9}e^{-3x} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので

$$y = ze^{3x} = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。 $-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。

[解 2] $(D^2 - 2D - 3)y = 0$ の一般解を y_1 とすると、 $y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ である (各自計算せよ)。

$(D^2 - 2D - 3)y = x + 4$ の特殊解を $y_2 = Ax + B$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2 - 2D - 3)y_2 &= D^2y_2 - 2Dy_2 - 3y_2 = -2A - 3Ax - 3B \\ &= -3Ax + (-2A - 3B) = x + 4\end{aligned}$$

より $-3A = 1, -2A - 3B = 4$ を得る。これを解くと $A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{10}{9}$ となる。 $y_2 = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9}$ なので

$$y = y_1 + y_2 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{10}{9}$$

である。

(5) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = \sin 2x$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = \sin x$ となる。 $u = (D-3)y$ とおくと u がみたく微分方程式は $(D+1)u = \sin x$ となる。

$$e^{-x}De^x = D + 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-x}De^xu = \sin x$ となるが、 $v = e^xu$ とおき両辺に左から e^x をかけると

$$Dv = e^x \sin 2x$$

となる。両辺を積分すると

$$z = \frac{1}{5}e^x \sin 2x - \frac{2}{5}e^x \cos 2x + C_1$$

となるので

$$u = ve^{-x} = \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x + C_1 e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D - 3)y = \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x + C_1 e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x} D e^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x} D e^{-3x} y = \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x + C_1 e^{-x}$ となるが、 $z = e^{-3x} y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz = \frac{1}{5} e^{-3x} \sin 2x - \frac{2}{5} e^{-3x} \cos 2x + C_1 e^{-4x}$$

となる。両辺を積分すると

$$z = \frac{4}{65} e^{-3x} \cos 2x - \frac{7}{65} e^{-3x} \sin 2x - \frac{C_1}{4} e^{-4x} + C_2$$

となるので

$$y = z e^{3x} = \frac{4}{65} \cos 2x - \frac{7}{65} \sin 2x - \frac{C_1}{4} e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

となる。 $-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = \frac{4}{65} \cos 2x - \frac{7}{65} \sin 2x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

となる。

[解 2] $(D^2 - 2D - 3)y = 0$ の一般解 y_1 は $y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ である (各自計算せよ)。

$(D^2 - 2D - 3)y = \sin 2x$ の特殊解を $y_2 = A \cos 2x + B \sin 2x$ と予想する。

$$\begin{aligned} (D^2 - 2D - 3)y_2 &= D^2 y_2 - 2D y_2 - 3y_2 \\ &= -4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 4B \cos 2x + 4A \sin 2x - 3A \cos 2x - 3B \sin 2x \\ &= (-7A - 4B) \cos 2x + (4A - 7B) \sin 2x \end{aligned}$$

より $-7A - 4B = 0, 4A - 7B = 1$ を得る。よって $A = \frac{4}{65}, B = -\frac{7}{65}$ なので解は

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{4}{65} \cos 2x - \frac{7}{65} \sin 2x$$

である。

(6) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = e^{2x}$ となる。 $u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = e^{2x}$ となる。

$$e^{-x}De^x = D+1$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-x}De^xu = e^{2x}$ となるが、 $v = e^xu$ とおき両辺に左から e^x をかけると

$$Dv = e^{3x}$$

となる。両辺を積分すると

$$v = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1$$

となるので

$$u = ve^{-x} = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D-3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^{-x}$ となるが、 $z = e^{-3x}y$ とおき両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$Dz = \frac{1}{3}e^{-x} + C_1e^{-4x}$$

となる。両辺を積分すると

$$z = -\frac{1}{3}e^{-x} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので

$$y = ze^{3x} = -\frac{1}{3}e^{2x} - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。 $-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。

[解 2] $(D^2 - 2D - 3)y = 0$ の一般解は $y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ である。 $(D^2 - 2D - 3)y = e^{2x}$ の特殊解 y_2 を $y_2 = Ae^{2x}$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2 - 2D - 3)y_2 &= D^2y_2 - 2Dy_2 - 3y_2 \\ &= 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} \\ &= -3Ae^{2x} = e^{2x}\end{aligned}$$

より $A = -\frac{1}{3}$ である。よって一般解は

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{3} e^{2x}$$

である。