解析学 I に対する追加説明 ♯1

- 番号は指定された format で書くこと。
- 名前と番号は必ず書くこと。
- 番号は学籍番号の最後の桁を略した番号を記入すること。

  例えば学籍番号が **1712306789** であれば最後の **9** を略して **171230678** になる。
- 再履修生に間違っている人が多いので特に注意をすること。
- **第 2 回から format が正しくない人は未提出と見なしています。**
- 解答用紙は指定された場所に置くこと。間違った場所に置いたものは未提出と見なします。
- 指定された演習問題を解くこと。
- 近似についてもう一度説明しておく。
- 近似値とは「真の値」に「近い」値のことをいうが,「真の値」が「分かれ」ば近似値を用いることはないので，一般に「真の値」は分からない。
- 真の値と近似値は等しくはないのでイコール (=) で両辺を結ぶことはできない。そこで通常記号 [≒] を用いて

  $$(\text{真の値}) \fallingdotseq (\text{近似値})$$

  と表す。

  $$(\text{誤差}) = (\text{真の値}) - (\text{近似値})$$

  であるが，真の値が正確に分からない以上，誤差も正確には分からない。

  しかし，誤差の絶対値があまり大きくては使用目的に合わないので，誤差の絶対値がどれくらい小さいかを求める必要がある。これを**誤差の評価**という。即ち誤差の評価は次の形になる。

  $$|(\text{誤差})| < (\text{ある値})$$

  (ある値) は通常 $a \times 10^{-n}$ の形で表す。

- 誤差は一般に小さいほどよいが，ある値以下にする必要のない場合もある。

  値 X の近似値を計算する場合を考える。

$$X = X_1 + X_2$$

  と表されているとする。X_1 の近似値が計算されて誤差が 10^{-3} 以下であるとする。このとき X_2 の近似値の誤差を 10^{-100} 以下にするためにガンバルことに意味はない。仮に X_2 の近似値の誤差を 10^{-100} 以下にできても，X の誤差は $10^{-3}+10^{-100}$ 以下である。その労力を X_1 の近似値計算の方にそそいで，X_1, X_2 ともに誤差を 10^{-4} 以下にできれば X の誤差は 2×10^{-4} とはるかによくなる。

- 誤差論は面白い分野であるが，ここではこれ以上は述べない。ここでは Taylor の定理を用いた近似と誤差の評価についてのみ述べる。

- テーラーの定理とは次であった。

  次を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

  $R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ であり，これを**剰余項**と呼ぶ。

- $x = a + h$ とする。h を用いて表すと

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + R_n$$

  となる。また $c = a + \theta(x-a)$ とするとき，剰余項を $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$ と書くこともある。

- 剰余項 R_n を切り捨てた $n-1$ 次式

$$g(h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k$$

で $f(a+h)$ を近似する。このとき誤差

$$\Delta = f(a+h) - g(h)$$

は R_n である。

- 次の演習 1.21 を例にする。

> $f(x) = e^x$ を $a = 0, n = 6$ としてテイラーの定理を用いて表し，その剰余項 R_6 を切り捨てることにより $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ の近似値を求めよ。また誤差を評価せよ。
> 更に同様な方法で誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決め近似値を求めよ。計算実行には電卓等を用いてよい

- $\dfrac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ なので $h = -\dfrac{1}{2}$，$a = 0$ として Taylor の定理を $n = 6$ の場合に書き下すことから始めればよい。

- $f(x) = e^x$ とすると $f^{(n)}(x) = e^x$ なので

$$\begin{aligned} f(h) &= \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} h^k + R_6 \\ &= 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5 + R_6 \qquad \left(R_6 = \frac{e^c}{6!}h^6\right) \end{aligned}$$

となる。ここで c は $h > 0$ なら $0 < c < h$，$h < 0$ なら $h < c < 0$ を満たす。$g(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} h^k$ とすると

$$f(h) = g(h) + R_6$$

である。

- 一般に Taylor の定理を用いた近似の場合近似値は右辺から剰余項を除いた式であり，誤差は剰余項である。

- $\dfrac{1}{\sqrt{e}} = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ の近似値は $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{e}} &\fallingdotseq g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{5!}\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{2329}{3840} = 0.606510416 \end{aligned}$$

となる。$-\dfrac{1}{2} < c < 0$ なので $0 < e^c < e^0 = 1$ となる。よって誤差は

$$|\Delta| = |R_6| = \left| \frac{e^c}{6!}\left(-\frac{1}{2}\right)^6 \right| < \frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{46080} = 2.170138888888889 \times 10^{-5}$$

と評価できる。

- 次に誤差が 10^{-10} 以下になるように n を決めて近似計算を行う。

  このとき剰余項 R_n は

  $$|R_n| = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n \right| = \frac{e^c}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-10}$$

  を満たしていればよい。不等式を計算すると $n! \cdot 2^n > 10^{10}$ となる。$n = 11$ のとき

  $$11! \cdot 2^{11} = 81749606400 > 10^{10}$$

  となるので $g_{10}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} x^k$ とおくと

  $$\frac{1}{\sqrt{e}} \fallingdotseq g_{10}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2253801941}{3715891200} = 0.6065306597243751$$

- $\sqrt{e}$ の近似計算をするために e の近似計算を用いて計算していた人がいた。この方法は間違いではないが，誤差の評価には注意が必要である。以下この部分には演習問題の星印がついていると考えること。

- $n = 6$ として近似計算をする。テーラーの定理より

  $$e^h = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5 + \frac{e^c}{6!}h^6$$

  となる。

  $$g_5(h) = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5$$

  とおくと e の近似値として

  $$e \fallingdotseq g_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60}$$

を得るので

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{\dfrac{163}{60}}} = 0.60671093570926$$

- テーラーの定理から得られる誤差 Δ は

$$\left| e - \frac{163}{60} \right| = |\Delta| = \left| \frac{e^c}{6!} 1^6 \right| < \frac{e}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \tag{1}$$

は e と $\dfrac{163}{60}$ の誤差であり，$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ と $\sqrt{\dfrac{60}{163}}$ との誤差ではない。

- この計算法での誤差を評価しよう。式 (1) より

$$-\frac{1}{240} < e - \frac{163}{60} < \frac{1}{240}$$

$$\frac{217}{80} = \frac{163}{60} - \frac{1}{240} < e < \frac{163}{60} + \frac{1}{240} = \frac{653}{240}$$

- $y = \sqrt{x}$ は単調増加なので

$$\sqrt{\frac{217}{80}} < \sqrt{e} < \sqrt{\frac{653}{240}}$$

$y = \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で単調減少なので

$$0.6072 > \frac{1}{\sqrt{\dfrac{217}{80}}} > \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{\sqrt{\dfrac{653}{240}}} > 0.6062$$

誤差を見れば分かるように Taylor の定理を用いて直接計算した誤差よりは大きくなっている。