解析学 I に対する追加説明 ♯2

- テーラーの定理は次であった。

次を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ であり，これを**剰余項**と呼ぶ。

- 関数 f が何回でも微分可能で，$R_n \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立するとき，テイラーの定理から

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

が得られる。これを $x = a$ における**テーラー級数**という。

- だから「テーラー級数を求めよ」という問題は,

$$R_n \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{1}$$

を仮定すれば n **次導関数を求める**問題である。

- 条件 (1) が成立するとき，f は $x = a$ で**テーラー級数展開可能**というが，我々は通常このことを仮定する。

- 次の問題を考える

$f(x) = x^2 \log x$ の $x = 2$ におけるテーラー級数を求めよ。

- $x = 2$ におけるテーラー級数は上で $a = 2$ としたものなので,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k$$

の形をしている。よって $f^{(k)}(x)$ を求めればよい。

- n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ の形を予想するため何回か微分してみる。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\log x + x \\
f''(x) &= 2\log x + 3 \\
f^{(3)}(x) &= 2x^{-1} \\
f^{(4)}(x) &= -2x^{-2} \\
f^{(5)}(x) &= 2\cdot 2x^{-3} \\
f^{(6)}(x) &= -2\cdot 2\cdot 3x^{-4}
\end{aligned}$$

- $6 = 3\times 2\times 1 = 3!$ に気がつけば $n \geq 3$ に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}2(n-3)!x^{-(n-2)} \tag{2}$$

  が予想される。

- 式 (2) を数学的帰納法で証明しよう。

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x} = (-1)^{3+1}2(3-3)!x^{-(3-2)}$$

  なので $n = 3$ のとき成立している。

- $n = k$ のとき成立することを仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}2(k-3)!x^{-(k-2)}$$

  の成立を仮定する。与式を x で微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' &= \left((-1)^{k+1}2(k-3)!x^{-(k-2)}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}2(k-3)!(-(k-2))x^{-(k-2)-1} \\
&= (-1)^{k+2}2(k-2)!x^{-(k-1)} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}2((k+1)-3)!x^{-((k+1)-2)}
\end{aligned}$$

  となり，$n = k+1$ でも成立している。

- 式 (2) は $n = 0$ および $n = 1, 2$ では成立していないことに注意すること。$n = 0$ のときは

$$f^{(0)}(x) = f(x) = x^2\log x$$

であるから $f^{(0)}(2)=4\log 2$ である。

$n=1$ のときは

$$f'(x)=2x\log x+x$$

より $f'(2)=4\log 2+2$ である。

$n=2$ のときは

$$f''(x)=2\log x+3$$

より $f''(2)=2\log 2+3$ である。

$n\geq 3$ のときは

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}2(n-3)!x^{-(n-2)}$$

より

$$f^{(n)}(2)=(-1)^{n+1}2(n-3)!2^{-(n-2)}$$

である。

- よって

$$\begin{aligned}
f(x)=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k\\
=&f^{(0)}(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2}(x-2)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k\\
=&4\log 2+(4\log 2+2)(x-2)+\frac{2\log 2+3}{2}(x-2)^2\\
&+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2(k-3)!2^{-(k-2)}}{k!}(x-2)^k\\
=&4\log 2+(4\log 2+2)(x-2)+\frac{2\log 2+3}{2}(x-2)^2\\
&+n\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k-1}k(k-1)(k-2)}(x-2)^k
\end{aligned}$$

が得られる。