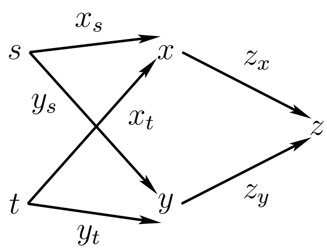
解析学Iに対する追加説明 $\sharp 4$

- 変数変換に関して説明しておく。
- 合成関数の導関数を求める方法を用いると別の変数に変換することができる。演習問題 2.17 を考える。

> $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする (2 次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ およびヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算し，関数 $z = f(x,y)$ に対し次を示せ。
>
> (1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$
>
> (2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

- 合成関数の導関数とは次のものであった。変数関係が下図のとき

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s$$



- x, y を r, θ で微分すると

$$x_r = \cos\theta, \qquad x_\theta = -r\sin\theta$$
$$y_r = \sin\theta, \qquad y_\theta = r\cos\theta$$

よってヤコビ行列およびヤコビアンは

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

- 合成関数の微分法より

$$
\begin{aligned}
z_r &= z_x x_r + z_y y_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta \\
z_\theta &= z_x x_\theta + z_y y_\theta = -z_x r \sin\theta + z_y r \cos\theta
\end{aligned}
$$

となる。

- この式を見ると (1) は右辺を変形する方が簡単そうであることに気がつく。右辺を左辺に変形することを考える。

$$
\begin{aligned}
z_r^2 + \left(\frac{1}{r} z_\theta\right)^2 =& \left(z_x \cos\theta + z_y \sin\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\left(-z_x r \sin\theta + z_y r \cos\theta\right)\right)^2 \\
=& z_x^2 \cos^2\theta + 2 z_x z_y \cos\theta \sin\theta + z_y^2 \sin^2\theta \\
& + z_x^2 \sin^2\theta - 2 z_x z_y \sin\theta \cos\theta + z_y^2 \cos^2\theta \\
=& z_x^2 + z_y^2
\end{aligned}
$$

- (2) も右辺を変形する。z_x,z_y に合成関数の合関数を適用する。

$$
\begin{aligned}
\left(z_x\right)_r &= \left(z_x\right)_x x_r + \left(z_x\right)_y y_r = z_{xx} \cos\theta + z_{xy} \sin\theta \\
\left(z_y\right)_r &= \left(z_y\right)_x x_r + \left(z_y\right)_y y_r = z_{yx} \cos\theta + z_{yy} \sin\theta \\
\left(z_x\right)_\theta &= \left(z_x\right)_x x_\theta + \left(z_x\right)_y y_\theta = -z_{xx} r \sin\theta + z_{xy} r \cos\theta \\
\left(z_y\right)_\theta &= \left(z_y\right)_x x_\theta + \left(z_y\right)_y y_\theta = -z_{yx} r \sin\theta + z_{yy} r \cos\theta
\end{aligned}
$$

- z_r を r で微分し，合成関数の導関数を適用する。このとき r で微分するとき θ が定数なことに注意すること。

$$
\begin{aligned}
z_{rr} =& \left(z_r\right)_r = \left(z_x \cos\theta + z_y \sin\theta\right)_r = \left(z_x\right)_r \cos\theta + \left(z_y\right)_r \sin\theta \\
=& z_{xx} \cos^2\theta + z_{xy} \sin\theta \cos\theta + z_{yx} \cos\theta \sin\theta + z_{yy} \sin^2\theta \\
=& z_{xx} \cos^2\theta + 2 z_{xy} \sin\theta \cos\theta + z_{yy} \sin^2\theta \\
z_{\theta\theta} =& \left(z_\theta\right)_\theta = \left(-z_x r \sin\theta + z_y r \cos\theta\right)_\theta = -\left(z_x r \sin\theta\right)_\theta + \left(z_y r \cos\theta\right)_\theta \\
=& -\left(z_x\right)_\theta r \sin\theta - z_x r \left(\sin\theta\right)_\theta + \left(z_y\right)_\theta r \cos\theta + z_y r \left(\cos\theta\right)_\theta \\
=& -\left(\left(z_x\right)_x x_\theta + \left(z_x\right)_y y_\theta\right) r \sin\theta - z_x r \cos\theta \\
& + \left(\left(z_y\right)_x x_\theta + \left(z_y\right)_y y_\theta\right) r \cos\theta - z_y r \sin\theta \\
=& -\left(-z_{xx} r \sin\theta + z_{xy} r \cos\theta\right) r \sin\theta - z_x r \cos\theta \\
& + \left(-z_{yx} r \sin\theta + z_{yy} r \cos\theta\right) r \cos\theta - z_y r \sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= z_{xx} r^2 \sin^2\theta - 2 z_{xy} r^2 \sin\theta\cos\theta + z_{yy} r^2 \cos^2\theta \\
&- z_x r\cos\theta - z_y r\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} =& z_{xx}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + z_{yy}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\
=& z_{xx} + z_{yy}
\end{aligned}
$$