解析学Iに対する追加説明 $\sharp 5$

- $x+y+z=7$ のとき $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$ における x^3y^3z の最大値が存在すればそれを求めることを考える。

- この問題を考えるためには最大値定理を必要とする。最大値定理とは

  > 有界閉集合で定義された連続関数は定義域で最大値をとる。

  というものである。

- D が $\partial D \subseteq D$ をみたすとき閉集合という。また D が或る半径の円に含まれるとき，即ち

$$\exists M \quad \forall (x,y)\in D \implies x^2+y^2\leq M^2$$

  のとき有界という。

- 問題を 2 変数に書き換える。

  $z=7-x-y$ と考え，

$$f(x,y)=x^3y^3z=x^3y^3(7-x-y)$$

  の最大値を求める。$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$ の条件

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$$

  を x,y についての条件に書き直すと

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 7$$

  となる。よって $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 7\}$ 上で $f(x,y)=x^3y^3(7-x-y)$ の最大値を求めればよい。

- 最大値定理の条件を満たしていることを見る。

$$\partial D=\{(x,0)\mid 0\leq x\leq 7\}\cup\{(0,y)\mid 0\leq y\leq 7\}\cup\{(x,7-x)\mid 0\leq x\leq 7\}$$

  なので $\partial D\subseteq D$ は成立している。

  $M=7$ とすると $(x,y)\in D$ のとき $x^2+y^2\leq 7^2$ となる。よって D は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は x,y の多項式なので連続である。

- 最大値定理より D 上で $f(x,y)$ は最大値をとる。最大値を与える点は境界上にあるか，内部にあれば臨界点である。

  よって境界上の点と内部の臨界点の中で関数の値が一番大きいものが最大値である。

- $(x,y)=(x,0)$ のとき $f(x,0)=0$ である。$(x,y)=(0,y)$ のとき $f(0,y)=0$ である。$(x,y)=(x,7-x)$ のとき $f(x,7-x)=0$ である。

  よって境界上では $f(x,y)=0$ となる。

- 内部の臨界点を調べる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^3(7-x-y)-x^3y^3=x^2y^3(3\cdot 7-4x-3y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^3y^2(7-x-y)-x^3y^3=x^3y^2(3\cdot 7-3x-4y)$$

  $x=0$ または $y=0$ のとき (x,y) は境界上の点である。

  内部で $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ を満たすのは $x=3,y=3$ である。

$$f(3,3)=3^6$$

- $3^6>0$ なのでなので最大値は 3^6 であり，それは $(x,y)=(3,3)$ のときである。