解析学 I に対する追加説明 $\sharp 6$

- 多変数関数の微分に関して復習する。
- 最初に連続，偏微分可能，全微分可能に関して復習する。
- 次の関数を例として考える。

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

- 関数 $z = f(x,y)$ が (a,b) で連続の定義は

  $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

  が成立することである。即ち

  (1) 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在すること，および

  (2) その極限値が関数の値 $f(a,b)$ に一致すること

  が必要である。

- よって関数 $f(x,y)$ が (a,b) で連続でないことを示すためには

  (1) 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在しないこと，または

  (2) 極限が存在しても極限値が関数の値 $f(a,b)$ に一致しないこと

  を示せばよい。

- (1) の関数に関して $(a,b) \neq (0,0)$ のとき

  $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{ab}{a^2+b^2} = f(a,b)$$

  なので原点以外では連続である。問題は原点において連続かどうかである。

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

  が存在するかどうかを調べる。

- 2 変数関数の極限で，不定形なので

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

と極座標に変換して考える。このとき $(x, y) \to (0, 0)$ ということと θ が色々変化しながら $r \to +0$ となることは同値である。

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \cos\theta\sin\theta$$

$\theta = 0$ として $r \to +0$ とすると $f(x, y) \to 0$ であるが $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ として $r \to +0$ とすると $f(x, y) \to \dfrac{1}{2}$ となる。2 変数関数の極限が存在するためには近づけ方によらずに一定の値に収束する必要がある。近づけ方によって値が異なるので極限値は存在しない。よって原点で連続ではない。

- 次に原点で偏微分可能であることを示す。偏微分可能とは x に関する導関数および y に関する導関数がともに存在することであった。$(x, y) \neq (0, 0)$ では

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (xy)_x \frac{1}{x^2 + y^2} + xy\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)_x \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2} - xy\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ f_y(x, y) &= \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$(x, y) = (0, 0)$ では

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h0}{h^2 + 0^2} - 0\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot 0 = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{k \to 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{0k}{0^2 + k^2} - 0\right) \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \cdot 0 = \lim_{k \to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

x に関する偏導関数も y に関する偏導関数も存在するので，すべての点で偏微分可能である。

- 原点 $(0,0)$ で全微分可能でないことを示す。$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とは次が成立することであった。定数 A,B,C が存在して

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-(A+Bh+Ck)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくとき

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

となる。

- 演習問題 2.6 より $A=f(a,b),B=f_x(a,b),C=f_y(a,b)$ であることが分かる。1 次式

$$A+Bh+Ck=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

は (a,b) における接平面の方程式である。

すなわち全微分可能とは接平面が存在することである。

- 背理法で示す。$(0,0)$ で全微分可能であるとすると，接平面の方程式は

$$\begin{aligned}z&=f(0,0)+f_x(0,0)h+f_y(0,0)k\\&=0+0h+0k=0\end{aligned}$$

となる。変数は x,y でなく h,k で表している。ただし今の場合 $x=0+h,y=0+k$ なので $x=h,y=k$ である。

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)&=\frac{f(0+h,0+k)-0}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{hk}{h^2+k^2}-0\right)\\&=\frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\end{aligned}$$

となる。

$h=r\cos\theta,k=r\sin\theta$ と極座標表示すると

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)&=\frac{r\cos\theta r\sin\theta}{\left(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\right)\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}}\\&=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^3}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\end{aligned}$$

となる。$\varepsilon(h,k)$ は $r\to+0$ のとき収束しないので全微分可能でない。

- この関数は原点以外では全微分可能である。定義に基づいても示せるが，ここでは次の定理を思い出そう。

  $z = f(x,y)$ が (a,b) において偏微分可能であり，偏導関数 f_x, f_y のどちらかが (a,b) で連続であれば全微分可能である。

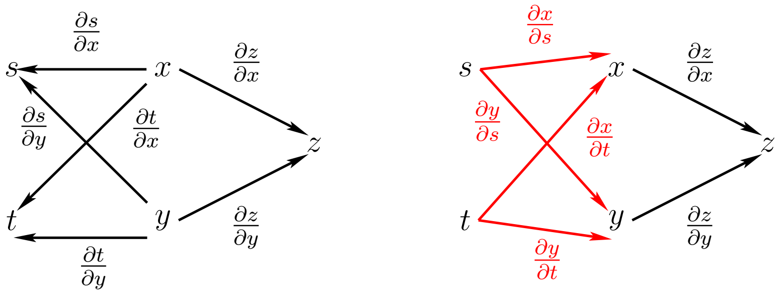
  $(a,b) \neq (0,0)$ のとき

  $$f_x(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

  は (a,b) で連続である。よって原点以外では全微分可能である。

- 次に合成関数・逆関数の導関数をヤコビ行列を用いて計算する方法について解説しておく。

- $z = x+y, s = x^2+y^2, t = x^2y^2$ を例に z_s, z_{ss} を求めてみよう。変数間の関係は下図左であって，下図右ではない。



- x_s, y_s を計算するため，$\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めその逆行列を計算する。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} &= \frac{D(x,y)}{D(s,t)} \\ &= \left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{4xy(x^2-y^2)} \begin{pmatrix} 2x^2y & -2y \\ -2xy^2 & 2x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2xy(x^2-y^2)} \begin{pmatrix} x^2y & -y \\ -xy^2 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- よって

$$x_s = \frac{x^2y}{2xy(x^2-y^2)} = \frac{x}{2(x^2-y^2)}, \quad y_s = \frac{-xy^2}{2xy(x^2-y^2)} = \frac{-y}{2(x^2-y^2)}$$

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s = 1\frac{x}{2(x^2-y^2)} + 1\frac{-y}{2(x^2-y^2)} = \frac{1}{2(x+y)}$$

- $z_{ss} = \left(z_s\right)_s$ なので先ほどの図式で z を z_s に置き換えたものを考える。

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "x_s"] \arrow[ddr, "y_s"'] & x \arrow[dr, "(z_s)_x"] & \\
 & & z_s \\
t \arrow[uur, "x_t"] \arrow[r, "y_t"'] & y \arrow[ur, "(z_s)_y"'] &
\end{tikzcd}$$

$$z_{ss} = \left(z_s\right)_x x_s + \left(z_s\right)_y y_s$$

である。x_s, y_s はすでに求めてある。$z_s = \dfrac{1}{2(x+y)}$ なので

$$\left(z_s\right)_x = -\frac{1}{2(x+y)^2}$$
$$\left(z_s\right)_y = -\frac{1}{2(x+y)^2}$$

よって

$$\begin{aligned} z_{ss} &= -\frac{1}{2(x+y)^2}\frac{x}{2(x^2-y^2)} - \frac{1}{2(x+y)^2}\frac{-y}{2(x^2-y^2)} \\ &= -\frac{x-y}{4(x+y)^2(x-y)(x+y)} = -\frac{1}{4(x+y)^3} \end{aligned}$$

- 関数を近似する多項式について考える。

$$z = f(x,y) = 1 + x + y + x^2 + xy + x^2y^2$$

を $(0,0)$ において近似する 2 次式を求めよう。

- $h = x-a, k = y-b$ とおき $g(h,k)$ を h,k に関する 2 次式とする。$g(h,k)$ が次を満たすとき $z = f(x,y)$ を (a,b) で近似する 2 次式という。

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - g(h,k)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2} = 0$$

- $(a,b)=(0,0)$ より $x=h, y=k$ である。$f(x,y)$ は多項式なので 2 次以上の項を切り捨てた多項式が近似する 2 次式であると予想してそのことを示す。即ち

$$g(h,k)=1+h+k+h^2+hk$$

とおく。

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(h,k)-g(h,k)}{h^2+k^2}$$

に対し $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ を示す。

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)&=\frac{(1+h+k+h^2+hk+h^2k^2)-(1+h+k+h^2+hk)}{h^2+k^2}\\&=\frac{h^2k^2}{h^2+k^2}\end{aligned}$$

極座標に直して極限を考える。

$$h=r\cos\theta, \qquad k=r\sin\theta$$

とおくと

$$\varepsilon(h,k)=\frac{r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}=r^2\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$(h,k)\to(0,0)$ のとき θ は不定であるが，$r\to+0$ となる。

$$\left|\cos\theta\right|\leq 1, \qquad \left|\sin\theta\right|\leq 1$$

より

$$\left|\varepsilon(h,k)\right|=\left|r^2\cos^2\theta\sin^2\theta\right|=r^2\left|\cos^2\theta\right|\cdot\left|\sin^2\theta\right|\leq r^2$$

$(h,k)\to(0,0)$ のとき $r\to+0$ なので

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

よって求める 2 次式は

$$g(h,k)=1+h+k+h^2+hk$$

である。

- $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$ の極点を求める。極点を求めるためには

  (1) 臨界点を求める。

  (2) ヘッシャンを用いて極点かどうかの判断をする。

  (3) ヘッシャンが 0 の場合は個別に考える。

  の 3 つの段階 (ヘッシャンが 0 にならない場合は 2 段階) が必要である。

- 最初に臨界点を求める。臨界点とは f_x, f_y ともに 0 になる点なので $f_x = 0$ かつ $f_y = 0$ の連立方程式を解けばよい。

$$z_x = 4x^3 - 2(x + y) = 0 \tag{1}$$

$$z_y = 4y^3 - 2(x + y) = 0 \tag{2}$$

なので，(1 式) から (2 式) を引くと

$$x^3 - y^3 = 0 \tag{3}$$

が得られる。

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

より $x - y = 0$ [A 式] または $x^2 + xy + y^2 = 0$ [B 式] である。

$x^2 + xy + y^2 = 0$ のとき，

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 0$$

となる。実数の 2 乗は正なので $x + \dfrac{y}{2} = 0$ かつ $y = 0$，よって $(x, y) = (0, 0)$ である。即ち

$$[\text{B 式}] \iff (x, y) = (0, 0)$$

である。

(3 式) $\iff$ [A 式]$\vee$[B 式] $\iff$ [A 式]$\vee (x, y) = (0, 0) \iff$ [A 式]

連立方程式は

$$(1\text{ 式}) \wedge (2\text{ 式}) \iff (1\text{ 式}) \wedge (3\text{ 式}) \iff (1\text{ 式}) \wedge [A\text{ 式}]$$

と変形できる。$x-y=0$ [A 式] を (1 式) [(2 式でも同様)] に代入すると

$$0=4x^3-2(x+x)=4x(x^2-1)=0$$

$x=0,1,-1$，よって $(x,y)=(0,0),(1,1),(-1,-1)$ となる。

- 次にヘッシャンを計算する。

$$z_{xx}=12x^2-2,\qquad z_{xy}=-2,\qquad z_{yy}=12y^2-2$$

より

$$H(\pm1,\pm1)=10^2-(-2)^2=96$$
$$H(0,0)=(-2)^2-(-2)^2=0$$

である。

- (a,b) が $z=f(x,y)$ の臨界点のとき

$$H(a,b)>0 \quad\Longrightarrow\quad (a,b)\text{ は極点である}$$
$$H(a,b)<0 \quad\Longrightarrow\quad (a,b)\text{ は極点でない}$$

であり，(a,b) が極点のとき

$$z_{xx}(a,b)>0 \quad\Longrightarrow\quad (a,b)\text{ は極小点である}$$
$$z_{xx}(a,b)<0 \quad\Longrightarrow\quad (a,b)\text{ は極大点である}$$

$z_{xx}(\pm1,\pm1)=10>0$ なので $(\pm1,\pm1)$ は極小値を与える極点であることが分かるが

$(0,0)$ はヘッシャンだけでは極点かどうか分からない。

- $x+y=0$ 上で z を考える。

$$z(x,-x)=x^4+(-x)^4-(x-x)^2=2x^4$$

なので, 原点のいくらでも近くに $z(x,-x)>0=z(0,0)$ となる点が存在する。よって原点は 2 変数関数 $z(x,y)$ の極大点ではない。

次に $x-y=0$ 上で考える。

$$z(x,x)=x^4+x^4-2(x+x)^2=2x^4-4x^2=2x^2(x^2-2)$$

$z(x,x)$ は 1 変数関数として $x=0$ で極大になっている。(各自グラフを描く等して確かめよ)

原点のいくらでも近くに $z(x,x) < z(0,0)$ となる点が存在する。よって原点は 2 変数関数 $z(x,y)$ の極小点ではない。

$(0,0)$ は極点ではない。

- 以上により極点は $(x,y)=(1,1),(-1,-1)$ である。
- 最大値を求める問題を考える。

  $D=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 4\}$ とし D 上で

$$z=f(x,y)=(x+1)^2+y^2$$

  の最大値が存在する場合はそれを求めることを考える。

- 最大値の存在を保証するものとして次の最大値定理がある。

  > 有界閉集合上で定義された連続関数はその定義域で最大値をとる。

- この定理を使用するためには定義域が有界閉集合であることが必要である。

  $\mathbb{R}^2$ の領域 D が有界であるとは D が原点中心の或る円に含まれること，論理記号で書くと

$$\exists M\in\mathbb{R}\quad \forall(x,y)\in D \implies x^2+y^2\leq M^2$$

  である。

  D が閉集合であるとはその境界を含むこと

$$\partial D\subseteq D$$

  となることである。

- 問題の D は $M=2$ とおけば条件が成立するので有界である。

$$\partial D=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}\subseteq D$$

  なので閉集合である。

- $z=f(x,y)=(x+1)^2+y^2$ は D で連続なので定理の条件を満たしている。よって最大値が存在する。

- 最大値をとる点は境界上の点であるか，そうでなければ内部の点であるが，内部の点のときは $z = f(x, y)$ の臨界点になっている。

  よって境界上の点または内部の臨界点の大きいほうが最大値を与える。

- 内部の臨界点を求める。

$$z_x = 2(x+1) = 0, \qquad z_y = 2y = 0$$

  この連立方程式をとくと $(x, y) = (-1, 0)$ が得られる。このとき $f(-1, 0) = 0$ である。

- 次に $z = f(x, y)$ を 境界 ∂D に制限して考える。

  境界上では $x^2 + y^2 = 4$ なのでこれを $f(x, y)$ に代入すると

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+1)^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 + 4 - x^2 = 5 + 2x \end{aligned}$$

  である。境界上では x が大きいほど $f(x, y)$ は大きくなる。∂D で x 座標が一番大きいのは $x = 2$ である。このとき $y = 0$ となる。

  よって境界上では $(2, 0)$ で最大になり，値は $f(2, 0) = 9$ である。

- 内部の臨界点では $f(-1, 0) = 0$，境界上では $f(2, 0) = 9$ なので最大値を与える点は $(2, 0)$ であり，最大値は $f(2, 0) = 9$ である。

- 最後に陰関数について考える。

  式 $F(x, y) = 0$ が与えられたとき，明示的に関数 $y = f(x)$ を定義しているわけではないが，陰覆的に定義していると考える。

- a のまわりで定義された関数 $y = f(x)$ が次を満たすとき F は (a, b) の近傍で陰関数 $y = f(x)$ を定めるという。

  (1) 定義されている任意の x に対し $F(x, f(x)) = 0$ が成立する。

  (2) $F(a, b) = 0$ および $b = f(a)$

- F が $F(a,b)=0$ かつ $F_x(a,b)\neq 0$ を満たしているとき陰関数が存在することが知られている。
- 変数を 1 つ増やした陰関数も考えられる。$F(x,y,z)$ は 3 変数関数とする。

  (a,b) のまわりで定義された関数 $z=f(x,y)$ が次を満たすとき F は (a,b,c) の近傍で陰関数 $z=f(x,y)$ を定めるという。

  (1) 定義されている任意の (x,y) に対し $F(x,y,f(x,y))=0$ が成立する。

  (2) $F(a,b,c)=0$ および $c=f(a,b)$
- 陰関数が与えられているとき，陰関数自身を明示的に表示することは一般的にはできないが，導関数は表示できる。

  $F(x,y)=0$ が与えられたとき y を x の関数と見て両辺を x で微分すれば自然に求まる。
- $F(x,y)=x^2+y^2-1$ とする。y を x を変数とする関数と見て両辺を微分すると

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

  より $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ を得る。
- $F(x,y,z)=1+x+y+z+xyz=0$ とする。z を x,y を変数とする 2 変数関数と見る。

  与式を x で微分すると

$$1+z_x+yz+xyz_x=0 \tag{1}$$

  となる。これより $z_x=-\dfrac{1+yz}{1+xy}$ を得る。与式を y で微分すると

$$1+z_y+xz+xyz_y=0$$

  となる。これより $z_y=-\dfrac{1+xz}{1+xy}$ を得る。

  式 (1) を y で微分すると

$$z_{xy}+z+yz_y+xz_x+xyz_{xy}=0$$

となる。これより

$$
\begin{aligned}
z_{xy} &= \frac{x+y+xyz-z}{(1+xy)^2} \\
&= \frac{-2z-1}{(1+xy)^2}
\end{aligned}
$$

を得る。