解析学Iに対する追加説明 $\sharp 8$

- 三角関数の有理関数の積分の場合 $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと有理関数の積分になることが知られている。一見どのように思いついたかが分からないかもしれないが，次の 3 つの事実に気がつけばこの方法を思いつくことはそれほど難しくないと思われる。これに関して説明する。

  (1) $\sin 2x, \cos 2x$ は $\sin x, \cos x$ の偶数乗で表わすことができる。

  (2) $(\tan x)'$ は $\tan x$ で表わすことができる。

  (3) $\sin x, \cos x$ の偶数乗は $\tan x$ で表わすことができる。

- (1) は

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

- (2) は

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\end{aligned}$$

- $\sin x, \cos x$ の偶数乗は $\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x$ の積になっているのでこの 3 つが $\tan x$ で表わされれば示される。

$$\begin{aligned}\sin x\cos x &= \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\sin x\cos x\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\dfrac{1}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}\end{aligned}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

- (2) と (3) とから三角関数の有理関数で各項が $\sin x, \cos x$ の偶数乗の不定積分を求める一般的方法が出てくる。

  即ちこのとき不定積分は $t = \tan x$ とおくと t に関する有理関数の不定積分になる。

  実際 $\sin x, \cos x$ の偶数乗である単項式は

  $$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

  なので t の有理関数になり，三角関数の有理関数で各項が $\sin x, \cos x$ の偶数乗であるものは t の有理関数になる。また $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{1+t^2}$ なので t に変数変換した結果も有理関数になる。

- $x = 2u$ とおくと

  $$\sin x = \sin 2u = 2\sin u \cos u, \quad \cos x = \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

  であり，$\sin x, \cos x$ は $\sin u, \cos u$ の偶数乗で書かれる。前項の結果から偶数乗の項のみをもつ有理関数は $s = \tan u$ とおくと u の有理関数に変換することができる。

  以上により $s = \tan u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと有理関数の積分になることが分かる。

- 置換積分の例を計算しよう。一見それほど複雑に見えなくても複雑になる問題もある。

  $$I = \int \frac{1}{a + b\sin x}\,dx \quad (a, b > 0)$$

  を計算しよう。

- 積分計算は基本的には部分積分でやるか置換積分でやるかしかない。部分積分の場合は被積分関数が $xg(x)$ の形をしてい

る等慣れてくればある程度予想可能である。置換積分は色々な置き方が可能で多様である。方針が立たないときは，とりあえず適当に置いて少し計算して，うまくいかなければ別の置換積分を考える，という方法をとるしかない。

- この問題は三角関数の有理関数なので，うまい方法が見つからない場合は**最後の手段**がある。$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\frac{dt}{dx}=\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)'=\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)'\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{1+t^2}{2}$$

$$\sin x=\sin\left(2\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$I=\int\frac{1}{a+b\sin x}\,dx=\int\frac{1}{a+b\frac{2t}{1+t^2}}\frac{dx}{dt}\,dt=\int\frac{1}{a+b\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$=\int\frac{2}{a(1+t^2)+2bt}\,dt=\int\frac{2}{at^2+2bt+a}\,dt$$

- t に関する有理関数の積分になった。a,b という定数が入っているが，有理関数の積分の理論を理解していれば，方針ははっきりしている。

  この 2 次式が実数の範囲で因数分解できるなら，因数分解して部分分数分解を行い，できない場合は

$$\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\arctan t$$

  に帰着させる。

- 分母の 2 次式の判別式の $\dfrac{1}{4}$ を D とおくと

$$D = b^2 - a^2$$

である。

- $D > 0$ のとき $\alpha = \dfrac{b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a}, \beta = \dfrac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$ とおくと

$$at^2 + 2bt + a = a(t - \alpha)(t - \beta)$$

と因数分解できる。

$$\frac{2}{at^2 + 2bt + a} = \frac{A}{t - \alpha} + \frac{B}{t - \beta}$$

とおき A, B を求める。

$$aA(t - \beta) + aB(t - \alpha) = 2 \tag{1}$$

が恒等的に成立している。(1) に $t = \beta$ を代入し，$\beta - \alpha = \dfrac{2\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$ を用いて計算すると $aB(\beta - \alpha) = 2$ より

$$B = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

(1) に $t = \alpha$ を代入すると

$$A = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{B}{t - \beta} + \frac{A}{t - \alpha} \right) dt = B \log \left| t - \beta \right| + A \log \left| t - \alpha \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left(\log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{-b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right| - \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{-b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right| \right) \end{aligned}$$

- $D = 0$ のときは実数解をもつが重解である。

$$D = b^2 - a^2 = 0$$

より $b = a$ である。

$$at^2 + 2bt + a = at^2 + 2at + a(t^2 + 2t + 1) = a(t + 1)^2$$

より

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{2}{at^2+2bt+a}\,dt = \int \frac{2}{a(t+1)^2}\,dt = -\frac{2}{a(t+1)} \\
&= -\frac{2}{at+a} = -\frac{2}{at+b} = -\frac{2}{a\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+b}
\end{aligned}
$$

- $D<0$ のとき 2 次式は実数の範囲では因数分解できない。この場合はまず 2 次式を 1 次の項が 0 になるように変形する。

$$
\begin{aligned}
at^2+2bt+a &= a\left(t^2+2\frac{b}{a}t\right)+a = a\left(t^2+2\frac{b}{a}t+\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)+a \\
&= a\left(t^2+2\frac{b}{a}t+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)-\frac{b^2}{a}+a = a\left(t+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{a^2-b^2}{a}
\end{aligned}
$$

$u=t+\dfrac{b}{a}$ とおくと $\dfrac{du}{dt}=1$ より

$$
I = \int \frac{2}{at^2+2bt+a}\,dt = \int \frac{2}{a\left(t+\dfrac{b}{a}\right)^2+\dfrac{a^2-b^2}{a}}\,dt = \frac{1}{a}\int \frac{2}{u^2+\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}\,du
$$

これを

$$
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx
$$

に帰着させる。$u=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}w$ とおくと

$$
\begin{aligned}
u^2+\frac{a^2-b^2}{a^2} &= \frac{a^2-b^2}{a^2}w^2+\frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2}\left(w^2+1\right) \\
\frac{du}{dw} &= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a}\int \frac{2}{u^2+\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}\,du = \frac{1}{a}\int \frac{2}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\left(w^2+1\right)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\,du \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int \frac{1}{w^2+1}\,dw = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan w \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}u\right) = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(t+\frac{b}{a}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{at+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)
\end{aligned}
$$