解析学 I に対する追加説明 ♯9

- 微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0$$

の解法を復習しよう。

- 微分演算子 D を用いて変形すると $Dy = y', D^2y = D(Dy) = D(y') = y''$ より

$$y'' + ay' + by = D^2y + aDy + by = (D^2 + aD + b)y$$

となるので微分方程式

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = 0 \tag{1}$$

を考える。

- 結論を先に述べると微分方程式 (1) の解は以下である。

2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ の解を α, β とする。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1xe^{\alpha x} + C_2e^{\alpha x}$$

である。

- この結果を憶えることが大事ではなく，どのようにするとこの結果がえられるのかを理解することが大切である。

- $\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b$$

となる。よって

$$\varphi(t) = t^2 + at + b = t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta = (t - \alpha)(t - \beta)$$

が成立する。このとき

$$(D - \alpha)(D - \beta) = D(D - \beta) - \alpha(D - \beta) = DD - D\beta - \alpha D + \alpha\beta$$

となるが β は定数なので $D\beta = \beta D$ が成立するので

$$
\begin{aligned}
&= D^2 - \beta D - \alpha D + \alpha\beta = D^2 - (\alpha+\beta)D + \alpha\beta \\
&= D^2 + aD + b
\end{aligned}
$$

が成立する。よって微分方程式 (1) は

$$(D-\alpha)(D-\beta)y = 0 \tag{2}$$

と変形される。

- 微分方程式 (2) を解くために $u = (D-\beta)y$ と置く。u に関する微分方程式は

  $$(D-\alpha)u = 0 \tag{3}$$

  となる。$e^{\alpha x}De^{-\alpha x} = D - \alpha$ より (3) は $e^{\alpha x}De^{-\alpha x}u = 0$ となるが，$v = e^{-\alpha x}u$ とおき両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると

  $$Dv = 0 \tag{4}$$

  となる。

- 両辺を積分すると $v = C_1$ となるので

  $$u = ve^{\alpha x} = C_1e^{\alpha x}$$

  となる。よって y についての微分方程式は

  $$(D-\beta)y = C_1e^{\alpha x} \tag{5}$$

  となる。

- $e^{\beta x}De^{-\beta x} = D - \beta$ を用いて微分方程式 (5) は

  $$e^{\beta x}De^{-\beta x}y = C_1e^{\alpha x}$$

  となるが，$z = e^{-\beta x}y$ とおき両辺に左から $e^{-\beta x}$ をかけると

  $$Dz = C_1e^{(\alpha-\beta)x} \tag{6}$$

  となる。

- ここで $\alpha \neq \beta$ の場合と $\alpha = \beta$ の場合に場合分けを行う。
  最初に $\alpha \neq \beta$ のときを考える。両辺を積分すると

  $$z = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$$

  となるので

  $$y = e^{\beta x} z = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

  となる。$\dfrac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

  $$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

  となる。

- $\alpha = \beta$ のときは $e^{(\alpha-\beta)x} = e^0 = 1$ なので式は

  $$Dz = C_1$$

  となる。両辺を積分すると

  $$z = C_1 x + C_2$$

  となり

  $$y = e^{\beta x} z = C_1 x e^{\beta x} + C_2 e^{\beta x}$$

  を得る。このときは $\alpha = \beta$ なので一般解

  $$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

  と表示できる。