

### 3.3 諸計算 II(置換積分)

この節では更に進んだ置換積分を扱う。今まで出てきた置換積分は被積分関数を見るとある程度変数の置き方が想定できた。ここで扱う置換積分は予め学んでいなければ分からないような置換積分である。

#### 1 三角関数の有理関数

三角関数の有理関数とは、 $R(s, t)$  を  $s, t$  に関する有理関数とすると  $R(\sin x, \cos x)$  の形をしている関数のことである。例えば  $R(s, t) = \frac{s}{s+t}$  のとき、 $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$  である。

この形の関数の積分は  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおくと有理関数の積分になることが知られている。即ち次が成立する。

**命題 3.5**  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおくと

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

**例 3.6** 積分  $I = \int \frac{1}{\sin x} dx$  を計算する。 $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  と置く。

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} (1+t^2) \\ \sin x &= \sin 2\frac{x}{2} = \frac{\sin 2\frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right|$$

となる。

ここでは  $\cos x$  を  $t$  で表すことは必要ないので計算していない。 $\cos x$  は  $\sin x$  と同様な方法で計算できる。

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \frac{\cos 2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

**演習問題 3.3** 命題 3.5 を証明せよ。

この方法は**万能であるが最善の方法とは限らない**。例えば、 $\tan x$  で表されるときは  $t = \tan x$  と置く方が一般に簡単になる<sup>(1)</sup>。

$I = \int \tan^2 x \, dx$  の場合  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  と置いても出来るが、計算は少し面倒である。

$t = \tan x$  と置くと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$  なので

$$\begin{aligned} I &= \int t^2 \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt = \int dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= t - \arctan t = \tan x - x \end{aligned}$$

となる。

一方  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{8t^2}{(1-t)^2(1+t)^2(1+t^2)} dt \\ &= \int \left\{ \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{2}{1+t^2} \right\} dt \\ &= -\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - 2 \arctan t \\ &= -\frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} - \frac{1}{\tan \frac{x}{2} - 1} - 2 \arctan \left( \tan \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

**演習問題 3.4** 次を示せ。

$$-\frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} - \frac{1}{\tan \frac{x}{2} - 1} - 2 \arctan \left( \tan \frac{x}{2} \right) = \tan x - x$$

このように三角関数の積分の場合、ここで紹介した方法は最後の手段と考え、他の方法で試みてできないときに適用すると考えた方がよいであろう。

例えば被積分関数が三角関数の積の形るとき「積を和に直す公式」が使える。

---

<sup>(1)</sup>一般に三角関数の 2 次式の有理関数は  $t = \tan x$  とおくと有理関数の積分に変換できる。それは  $\frac{dt}{dx} = 1 + t^2, \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \cos x \sin x = \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{t}{1+t^2}$  とすべて  $t$  の有理式で表せるからである。

例として  $\cos^2 x$  の積分を考える。この場合「積を和に直す」式は倍角公式である。

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{より} \\ \cos^2 x &= \frac{\cos 2x + 1}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{\cos 2x + 1}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{2} \int dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x\end{aligned}$$

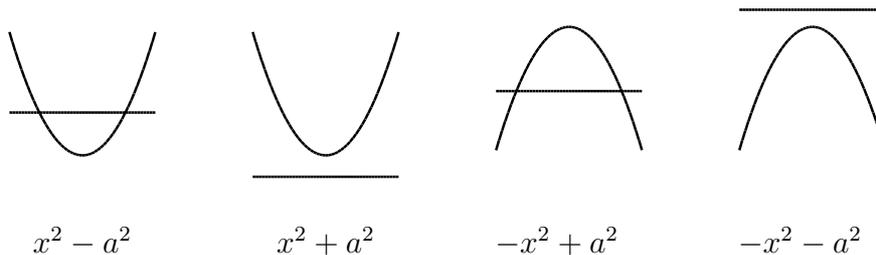
**演習問題 3.5** 次の関数の不定積分を求めよ。ただし (8), (9) において  $a, b$  ともに正とする。

- |                                 |                              |                                 |
|---------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| (1) $\sin x \cos x$             | (2) $\sin^3 x$               | (3) $\frac{1}{\cos x}$          |
| (4) $\frac{1}{\tan x}$          | (5) $\frac{1}{1 + \sin x}$   | (6) $\frac{1}{\sin x - \cos x}$ |
| (7) $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ | (8) $\frac{1}{a + b \tan x}$ | (9) $\frac{1}{a + b \sin x}$    |

**2** ルートの中の 2 次式 (1)—三角関数

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx$  の形の積分を求める。ただし、 $R(s, t)$  は  $s$  と  $t$  の有理関数とする。2 通りの方法で計算をする。最初は三角関数を用いて変換するものを紹介し、次に無理式を用いるものを紹介する。

三角関数を用いる変換の場合 2 次式は一次式を用いて変数変換しておく。変数変換すると、次のいずれかにできる。



最後の  $-x^2 - a^2$  は常に負なのでこの場合はおこらない。また  $a = 0$  のときは  $\sqrt{x^2} = x$  ( $x \geq 0$  と仮定して) となる。よって  $a > 0$  を仮定する。例えば  $x^2 + x + 1$  の場合は

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= x^2 + 2x \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となるので  $t = x + \frac{1}{2}$  と変数変換すると  $t^2 + \frac{3}{4} = t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$  となる

ので  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$  となる。

よってあらかじめ  $a^2 - x^2, x^2 + a^2, x^2 - a^2$  のいずれかの形に変形されているものとする。

$\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$  等であるが煩雑さを避けるため、以下では  $\sin x, \cos x, \tan x$  は 0 以上であるとする。

$$(1) \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$x = a \sin t \text{ と置くと, } \frac{dx}{dt} = a \cos t, \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t \text{ より}$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \int R(a \sin t, a \cos t) a \cos t dt$$

$$(2) \int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$$

$$x = a \tan t \text{ と置くと, } \frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos^2 t}, \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2 t + 1)} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t} \text{ より}$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx = \int R\left(a \tan t, \frac{a}{\cos t}\right) \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

$$(3) \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

$$x = \frac{a}{\sin t} \text{ と置くと, } \frac{dx}{dt} = -\frac{a \cos t}{\sin^2 t}, \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2(1 - \sin^2 t)}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{a \cos t}{\sin t} \text{ より}$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = - \int R\left(\frac{a}{\sin t}, \frac{a \cos t}{\sin t}\right) \frac{a \cos t}{\sin^2 t} dt$$

いずれの場合も三角関数の有理関数に帰着できる。

三角関数へのおき方は場合により異なるが、いずれの場合も代入して変形するとルートの中が 2 乗の形になる。逆に 2 乗の形になるようにおくと計算がうまくいく。

**例 3.7** 例を考える。

[1]  $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$  を求める。(2) より  $x = \tan t$  とおくと  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$  である。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

を用いて変数変換を実行すると

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt$$

と変形でき、三角関数の有理関数の積分になる。この積分を求めるために「**[1]** 三角関数の有理関数」で扱った変数変換を実行する。  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

とおくと、  $\frac{du}{dt} = \frac{1+u^2}{2}$ ,  $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$  より

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos t} dt &= \int \frac{1+u^2}{1-u^2} \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{2}{1-u^2} du \\ &= \int \left\{ \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right\} du = \log|1+u| - \log|1-u| \\ &= \log \left| 1 + \tan\left(\frac{1}{2} \arctan x\right) \right| - \log \left| 1 - \tan\left(\frac{1}{2} \arctan x\right) \right| \end{aligned}$$

となる。

[2]  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx$  を求める。(3) より  $x = \frac{\sqrt{2}}{\sin t}$  とおくと  $\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{2} \cos t}{\sin^2 t}$  である。

$$x^2 - 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sin t}\right)^2 - 2 = \frac{2(1 - \sin^2 t)}{\sin^2 t} = \frac{2 \cos^2 t}{\sin^2 t}$$

を用いて変数変換を実行すると

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{\sin t}{\sqrt{2} \cos t} \left(-\frac{\sqrt{2} \cos t}{\sin^2 t}\right) dt = -\int \frac{1}{\sin t} dt$$

と変形できる。  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$  とおくと  $\frac{du}{dt} = \frac{1+u^2}{2}$ ,  $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$  より

$$\begin{aligned} -\int \frac{1}{\sin t} dt &= -\int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2}{1+u^2} du = -\int \frac{1}{u} du \\ &= -\log|u| = -\log \left| \tan\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{x}\right) \right| \end{aligned}$$

となる。

**演習問題 3.6** 次の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} \quad (2) \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} \quad (3) \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \quad (5) \sqrt{1-x^2}$$

### 3 ルートの中の2次式(2)—無理関数

ルートの中に2次式がある場合の積分  $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$  を求める2番目の方法として、無理式を用いる方法を紹介する。

(1)  $a > 0$  の場合

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{ax}$  と置く。両辺を2乗すると

$$ax^2 + bx + c = t^2 - 2\sqrt{at}x + ax^2$$

$$(b + 2\sqrt{at})x = t^2 - c$$

より  $x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}$  となる。これを微分すると

$\frac{dx}{dt} = \frac{2\sqrt{at^2} + 2bt + 2\sqrt{ac}}{(2\sqrt{at} + b)^2}$  である。 $t - \sqrt{ax}$  に上の  $x$  の式を代入すると

$$\begin{aligned} t - \sqrt{ax} &= t - \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{2\sqrt{at} + b} = \frac{t(2\sqrt{at} + b)}{2\sqrt{at} + b} - \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{2\sqrt{at} + b} \\ &= \frac{\sqrt{at^2} + bt + \sqrt{ac}}{2\sqrt{at} + b} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} &\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx \\ &= \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \frac{\sqrt{at^2} + bt + \sqrt{ac}}{2\sqrt{at} + b}\right) \frac{2\sqrt{at^2} + 2bt + 2\sqrt{ac}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt \end{aligned}$$

(2)  $ax^2 + bx + c = 0$  が2解  $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$  を持つとき。 $a > 0$  の場合もできるがここでは  $a < 0$  とする<sup>(2)</sup>。 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$  となる。

$t = \sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}$  または同じことだが  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$  と置く。両辺を2乗すると

$$t^2 = \frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}$$

<sup>(2)</sup> $a > 0$  のときは (1) $x - \alpha > 0$  かつ  $x - \beta > 0$  と (2) $x - \alpha < 0$  かつ  $x - \beta < 0$  の2つの場合がある。後者の場合は符号が変わるが同様に計算できる。

となるがこれを  $x$  について解くと  $x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}$  が得られる。これを微分すると  $\frac{dx}{dt} = \frac{2a(\beta - \alpha)t}{(t^2 - a)^2}$  である。

$$\begin{aligned} x - \alpha &= \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a} - \alpha = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a} - \frac{\alpha(t^2 - a)}{t^2 - a} \\ &= \frac{a(\alpha - \beta)}{t^2 - a} \quad \text{より} \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= t(x - \alpha) = \frac{a(\alpha - \beta)t}{t^2 - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \\ = \int R\left(\frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}, \frac{a(\alpha - \beta)t}{t^2 - a}\right) \frac{2a(\beta - \alpha)t}{(t^2 - a)^2} dt \end{aligned}$$

を得る。

**例 3.8**  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$  を求める。この問題は (1) の方法も、(2) の方法も適用可能である。両方の方法で計算する。最初は (1) の方法で。

$\sqrt{x^2 - 1} = t - x$  とおく。両辺を 2 乗すると  $x^2 - 1 = t^2 - 2tx + x^2$  となるが、これを  $x$  について解くと

$$x = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

となる。 $x$  を  $t$  で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 - 1}{2t^2}$$

となる。

$$t - x = t - \frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

なので変数変換を行う。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int \frac{2t}{t^2 - 1} \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log |t| = \log \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| \end{aligned}$$

次に (2) の方法で積分を求める。 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$  なので  $\sqrt{x^2 - 1} = t(x+1)$  とおく。両辺を 2 乗すると  $x^2 - 1 = t^2(x+1)^2$  となり両辺を  $x+1$  で割ると  $x - 1 = t^2(x+1)$  となり、

$$t^2 = \frac{x - 1}{x + 1}$$

が得られる。両辺を  $x$  で微分すると

$$2t \frac{dt}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

となるので変数変換を実行する。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{1}{t(x+1)} t(x+1)^2 dt = \int (x+1) dt$$

$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$  より  $x+1 = \frac{2}{1-t^2}$  となるので

$$\begin{aligned} &= \int \frac{2}{1-t^2} dt = \int \left( \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \log \left| 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| - \log \left| 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| \end{aligned}$$

**演習問題 3.7** 次を示せ。

$$\log \left| 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| - \log \left| 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| = \log \left| x + \sqrt{x^2-1} \right|$$

**演習問題 3.8** 次の関数の不定積分を求めよ。

(1)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                       (2)  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$                       (3)  $\sqrt{x^2+2}$

(4)  $\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

すでにくっつか例がでてきているが、方法の違いで積分結果が一見違うように見えるときもある。例えば、

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

を考える。三角関数で置換すると、 $x = \frac{1}{\sin t}$  より  $\frac{dx}{dt} = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}$  となる。

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1} &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{\sin t} \\ I_1 &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int \sin t \frac{\sin t}{\cos t} \left( -\frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) dt \\ &= -\int dt = -t = -\arcsin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となる。無理式を用いると、 $\sqrt{x^2-1} = t-x$  より、2乗すると  $x^2-1 = t^2-2tx+x^2$  となる。よって

$$x = \frac{t^2+1}{2t}$$

である。微分すると  $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2-1}{2t^2}$  であり、

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1} &= t-x = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{2t^2}{2t} - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} \\ I_2 &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{2t}{t^2+1} \frac{2t}{t^2-1} \frac{t^2-1}{2t^2} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \arctan t = 2 \arctan(x + \sqrt{x^2-1})\end{aligned}$$

となる。見かけは違うが、実は  $x \geq 1$  では  $I_2 = \pi + I_1$  となっている。

**演習問題 3.9**  $x \geq 1$  のとき  $I_2 = \pi + I_1$  を示せ。

**演習問題 3.10** 今までは学んだことに対応する演習問題で、演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚(?)を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない(?)。

次の関数の不定積分を求めよ。

- |                                     |  |  |
|-------------------------------------|--|--|
| (1) $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$      | (2) $\cos^2 x - \sin^2 x$              | (3) $\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$            |
| (4) $x \arcsin x$                   | (5) $\frac{\cos 2x}{e^{3x}}$           | (6) $xe^{-x}$                            |
| (7) $x \cos x$                      | (8) $x^2 \sin x$                       | (9) $e^{3x+1}$                           |
| (10) $2x \arctan x$                 | (11) $\log(2x+1)$                      | (12) $\frac{1}{x(\log x)^n}$             |
| (13) $x^2 \log x$                   | (14) $xe^{2x^2+3}$                     | (15) $\frac{e^x}{x} + e^x \log x$        |
| (16) $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ | (17) $(2x+1) \sin(x^2+x+1)$            | (18) $\cos^n x \sin x$                   |
| (19) $(ax^2+bx+c)e^x$               | (20) $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$ | (21) $\sin(\log x)$                      |
| (22) $x^3 e^x$                      | (23) $x^4 e^x$                         | (24) $\frac{1}{x^4+x^2+1}$               |
| (25) $\frac{1}{1+x^2}$              | (26) $\frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$        | (27) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$            |
| (28) $\frac{1}{\cos^8 x}$           | (29) $\frac{1}{\sin x \cos^5 x}$       | (30) $\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$ |
| (31) $\frac{x}{\sqrt{a-x}}$         | (32) $\frac{1}{3+\cos x}$              | (33) $\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$    |

(34) $\frac{1}{(e^x + e^{-x})^4}$	(35) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(36) $\sqrt{x^2-1}$
(37) $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	(38) $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$	(39) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
(40) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$	(41) $\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$	(42) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$
(43) $\frac{1}{4+x^2}$	(44) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$	(45) $\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$
(46) $3x^2e^{x^3+1}$	(47) $\frac{1}{x^3(x+1)}$	(48) $\frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$
(49) $\frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$	(50) $\frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$	(51) $\frac{3}{x^3-1}$
(52) $\frac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$	(53) $\frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$	(54) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$
(55) $\frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$	(56) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$	(57) $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$
(58) $\frac{1}{2-\tan^2 x}$	(59) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$	(60) $\frac{\cos x}{\sin^n x}$
(61) $\frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$	(62) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	(63) $\frac{\log(\log x)}{x}$
(64) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$	(65) $\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$	(66) $\frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$
(67) $\frac{12}{x^3-8}$	(68) $\frac{\sin x}{1+\sin x}$	(69) $\sin 4x$
(70) $\frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$	(71) $\frac{x^2}{1+x^2} \arctan x$	(72) $\frac{\sin x}{3+\tan^2 x}$
(73) $\log(1+\sqrt{x})$	(74) $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$	(75) $3x^2(x^3+5)^6$
(76) $\frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$	(77) $\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$	(78) $e^{ax} \cos bx$
(79) $e^{ax} \sin bx$		

重要な注意：不定積分において計算は一般に大変であるが、**検算**は簡単である。求めた関数を微分して元の被積分関数になればよい。**必ず検算をする事!!**