解析学 I 要綱 ♯12

3.6 演算子法

微分するという操作を演算子 [1] と考え微分方程式を解く方法を紹介しよう。この節では特に断らなければ独立変数は x とする。

関数 y に対しその導関数 y' を対応させる写像を D と書き，微分演算子と呼ぶ。独立変数を明示的に表したいときは D_x と書く。$D(y) = y'$ だから例えば命題 3.9 の微分方程式は $D(y) = ky$ と書ける。

定数 λ を定数倍するという演算子と見る。即ち λ を，y に対し λy を対応させる (関数を λ 倍するという) 演算子と考える。同様に関数 $p(x)$ を関数倍する (y に対し $p(x)y$ を対応させる) 演算子と見る事ができる。

演算子 E, F に対し演算子としての和 $E + F$ を

$$(E + F)(y) = E(y) + F(y)$$

で定義する。積 FE を

$$(FE)(y) = F(E(y))$$

で定義する。一般には $FE \neq EF$ である。例えば $E = D$ (微分演算子),$F = p(x)$(関数倍) とすると

$$FE(y) = p(x)y', \quad EF(y) = E(p(x)y) = p'(x)y + p(x)y'$$

なので $EF - FE = p'(x)$ となる。$p'(x) \neq 0$ ($p(x)$ が定数でない) となるときは $EF \neq FE$ である。$EF \neq FE$ を除くと加法の交換法則，分配法則等は実数の和・積と同じ様に計算できる。

命題 3.9 の微分方程式は $D(y) = \lambda y$ であったが，$D(y) - \lambda y = 0$ と変形し，$D - \lambda$ を演算子と考えると $(D - \lambda)y = 0$ という式が得られる。

命題 3.11 $D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$ が成立する。一般に $q(x) = \displaystyle\int p(x)dx$ とすると $D - p(x) = e^{q(x)} D e^{-q(x)}$ が成立する。

証明 式が意味している事は任意の [2] 関数 y に対し

$$(D - \lambda)y = (e^{\lambda x} D e^{-\lambda x})y$$

[1]演算子とは，関数のある集合からある集合への写像である。きちんと議論するためには関数の集合をきちんと決定しておく必要があるのだが，ここでは明確にはしていない。それがいやな人はとりあえず微分可能な関数の全体と思っておいてよい。

[2]勿論微分可能な関数でなければ，D は作用できない。厳密には考えている範囲をきちんと定義する必要があるがここではきちんとさせないでおく。それがいやな人は，さしあたり C^∞ 関数全体を考えておけばよいだろう。

が成立する事である。

$(De^{-\lambda x})y = D(e^{-\lambda x}y)$ であり，積の微分法より

$$\begin{aligned} D(e^{-\lambda x}y) &= D(e^{-\lambda x})y + e^{-\lambda x}D(y) = -\lambda e^{-\lambda x}y + e^{-\lambda x}D(y) \\ &= e^{-\lambda x}\left\{D(y) - \lambda y\right\} = e^{-\lambda x}(D-\lambda)y \end{aligned}$$

となる。両辺に $e^{\lambda x}$ を掛けると

$$(D-\lambda)y = e^{\lambda x}\left\{D(e^{-\lambda x}y)\right\} = e^{\lambda x}\left\{(De^{-\lambda x})y\right\} = \left(e^{\lambda x}De^{-\lambda x}\right)y$$

となり前半の証明が終わる。

後半の証明は $D(e^{-q(x)}) = (-q(x))'e^{-q(x)} = -p(x)e^{-q(x)}$ である事に注意すれば

$$\begin{aligned} D(e^{-q(x)}y) &= D(e^{-q(x)})y + e^{-q(x)}D(y) = -p(x)e^{-q(x)}y + e^{-q(x)}D(y) \\ &= e^{-q(x)}\left\{D(y) - p(x)y\right\} = e^{-q(x)}\left(D - p(x)\right)y \end{aligned}$$

となるので，

$$\left(e^{q(x)}De^{-q(x)}\right)y = \left(D - p(x)\right)y$$

を得る。よって $\left(e^{q(x)}De^{-q(x)}\right) = \left(D - p(x)\right)$ となる。∎

演算子法を用いて命題 3.9 の別証明を与えよう。$Du = 0$ なら $u = C$(定数) である事を注意しておく。(一般に $Du = f(x)$ なら積分する事により $u = \displaystyle\int f(x)dx$ が得られる。) 与えられた微分方程式は演算子を用いて $(D-\lambda)y = 0$ と書ける。命題 3.11 より $e^{\lambda x}De^{-\lambda x}y = 0$ となる。$u = e^{-\lambda x}y$ とおくと $e^{\lambda x}Du = 0$ となり，両辺に $e^{-\lambda x}$ を掛けると $Du = 0$ を得る。よって $u = C$ となる。$C = u = e^{-\lambda x}y$ より $y = Ce^{\lambda x}$ を得る。

λ が定数でない場合でも演算子法を用いることにより次が得られる。

命題 3.12 微分方程式 $\left(D - p(x)\right)y = 0$ の一般解は $q(x) = \displaystyle\int p(x)dx$ とするとき

$$y = Ce^{q(x)} = C\exp\left(q(x)\right) = C\exp\left(\int p(x)dx\right)$$

である。

証明 命題 3.11 より $D - p(x) = e^{q(x)}De^{-q(x)}$ なので微分方程式は

$$\left(e^{q(x)}De^{-q(x)}\right)y = 0$$

と変形できる。$u = e^{-q(x)}y$ とおくと，$e^{q(x)}Du = 0$ より $Du = 0$ を得る。よって $u = C$(定数) となるので，$y = ue^{q(x)} = Ce^{q(x)}$ が分かる。∎

一般に演算子 L を

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

とするとき (ただし $a_n(x) \not\equiv 0$ とする),

$$Ly = f(x)$$

の形をしている微分方程式を n 階の**線型微分方程式** (*linear differential equation*) と呼ぶ。また $f(x) = 0$ のとき，この微分方程式を**同次型**といい，$f(x) \neq 0$ のとき**非同次型**という。

特に係数である $a_n(x)$ がすべて定数であるとき，**定数係数**の線型微分方程式という。定数係数の線型微分方程式は重要なタイプの微分方程式であり，しかも他のタイプに比べ解くのが容易である (というか変数係数の微分方程式は一般に解くのが非常に難しい)。この章では線型の微分方程式について議論する。

同次型の線型微分方程式の重要な性質として次がある。

命題 3.13 y が同次型の線型微分方程式の解のとき a を定数とすると ay も微分方程式の解である。また y_1, y_2 が同次型の線型微分方程式の解のとき $y_1 + y_2$ も微分方程式の解である。

演習問題 3.13 命題 3.13 を証明せよ。

以下では 2 階の定数係数線型微分方程式の解法を考える。即ち定数 a, b と関数 $f(x)$ が与えられているとき

$$(D^2 + aD + b)y = f(x)$$

という形の微分方程式を考える。

最初に同次型 ($f(x) = 0$ の場合) を考える。例から始めよう。$L = D^2 - 4$ とするとき $L(y) = 0$ すなわち

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$$

を解いてみよう。

定数倍という演算子は D と交換可能，即ち $D2 = 2D$ が成立する事を注意しておこう。

$$(D-2)(D+2) = D^2 - 2D + D2 - 4 = D^2 - 4$$

が成立するので

$$L(y) = (D^2 - 4)y = (D-2)(D+2)y = 0$$

となる。$u = (D+2)y$ とおくと，$(D-2)u = 0$ である。命題 3.11 より $D - 2 = e^{2x}De^{-2x}$ なので $e^{2x}De^{-2x}u = 0$ が成立している。$v = e^{-2x}u$ と

おくと，$e^{2x}Dv=0$ より，両辺に e^{-2x} をかけると $Dv=0$ となる。よって積分すると $v=C_1$ となる (C_1 は積分定数)。このとき $u=e^{2x}v=C_1e^{2x}$ となる。よって微分方程式は

$$(D+2)y=C_1e^{2x}$$

となる。命題 3.11 より $(D+2)=e^{-2x}De^{2x}$ となるので

$$e^{-2x}De^{2x}y=C_1e^{2x}$$

を得る。$z=e^{2x}y$ とおき，両辺に e^{2x} をかけると $Dz=C_1e^{4x}$ となる。両辺を積分する事により $z=\dfrac{C_1}{4}e^{4x}+C_2$ となる。$\dfrac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 とおくと $z=C_1e^{4x}+C_2$，よって一般解

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$$

を得る。

　この例は一般化できる。演算子 $L=D^2+aD+b$ に対し，微分方程式

$$Ly=0$$

を考える。2 次方程式 $t^2+at+b=0$ が異なる 2 つの解をもつとする。この例と同じ方法で一般解を求めることができる (演習問題 3.16)。

　次の例として $L=D^2-2D+1$ とするとき

$$Ly=0$$

を考える。前の例と同じように計算すれば解が得られるが，結果の形は異なる。$L=(D-1)^2$ と書けるので，$u=(D-1)y$ とおくと，微分方程式は $(D-1)u=0$ となる。$D-1=e^xDe^{-x}$ なので

$$e^xDe^{-x}u=0$$

が成立している。$v=e^{-x}u$ とおくと $e^xDv=0$ となり，$Dv=0$ を得る。よって $v=C_1$ としてよい。このとき $u=C_1e^x$ となる。$u=(D-1)y$ なので，$(D-1)y=C_1e^x$ となるが命題 3.11 を用いると

$$e^xDe^{-x}y=C_1e^x$$

となり，両辺に e^{-x} をかけて

$$D(e^{-x}y)=C_1$$

となる。両辺を積分すると

$$e^{-x}y=C_1x+C_2$$

となるので (C_2 は積分定数) 一般解

$$y = C_1 x e^x + C_2 e^x$$

を得る。

この例は一般化できる。演算子 $L = D^2 + aD + b$ に対し，微分方程式

$$Ly = 0$$

を考える。2 次方程式 $t^2 + at + b = 0$ が重解をもつとする。この例と同じ方法で一般解を求めることができる (演習問題 3.16)。

同次型の最後の例として微分方程式

$$\left(D^2 + D + 1\right) y = 0$$

を考える。

$t^2 + t + 1 = 0$ の解は $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ である。

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

とおくと $t^2 + t + 1 = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$ と因数分解できる。これより

$$D^2 + D + 1 = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$$

と因数分解できるので，定数が複素数であることを気にしなければ，最初の例と同様に計算できる。

微分方程式は

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) y = 0$$

である。$u = (D - \lambda_2) y$ とおくと，$(D - \lambda_1) u = 0$ となる。命題 3.11 より $D - \lambda_1 = e^{\lambda_1 x} D e^{-\lambda_1 x}$ なので $e^{\lambda_1 x} D e^{-\lambda_1 x} u = 0$ が成立している。$v = e^{-\lambda_1 x} u$ とおくと，$e^{\lambda_1 x} D v = 0$ より，両辺に $e^{-\lambda_1 x}$ をかけると $Dv = 0$ となる。よって積分すると $v = C_1$ となる。このとき $u = e^{\lambda_1 x} v = C_1 e^{\lambda_1 x}$ である。よって微分方程式は

$$(D - \lambda_2) y = u = C_1 e^{\lambda_1 x}$$

となる。命題 3.11 より $D - \lambda_2 = e^{\lambda_2 x} D e^{-\lambda_2 x}$ となるので微分方程式は

$$e^{\lambda_2 x} D e^{-\lambda_2 x} y = C_1 e^{\lambda_1 x}$$

となる。$z = e^{-\lambda_2 x} y$ とおき，両辺に $e^{-\lambda_2 x}$ をかけると

$$Dz = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2) x}$$

となる。両辺を積分する事により

$$z = \frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + C_2$$

となる。$\dfrac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ をあらためて C_1 とおき，両辺に $e^{\lambda_2 x}$ をかけると

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \\ &= C_1 \exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) \end{aligned}$$

となる。

$\exp\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)$ は複素数値関数なので，解関数 y も複素数値関数である。複素数値関数の範囲で解関数を調べている場合はこれで十分である。しかし実数値関数の解関数を必要とする場合は，オイラーの公式を用いて少し変形する必要がある。

オイラーの公式は

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

であった。これを用いると

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) &= \exp\left(\frac{-1}{2}x + \frac{i\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\} \end{aligned}$$

と変形できる。同様に

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) &= \exp\left(\frac{-1}{2}x + \frac{-i\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\} \end{aligned}$$

となる。

これを用いて一般解を変形する。

$$y = C_1 \exp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\} \\
&\quad + C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\} \\
&= (C_1 + C_2)\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (iC_1 - iC_2)\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x
\end{aligned}
$$

$A_1 = C_1 + C_2$，$A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと一般解

$$
y = A_1 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + A_2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x
$$

が得られるが，これは A_1, A_2 が実数のときは微分方程式の実数値関数の解になっている。このことは一般化することができる (演習問題 3.17)。

関数が複素関数の形で与えられていても，初期条件が実数で与えられると，特殊解は自然に実数値関数になる。前述の例で考える。微分方程式として

$$
(D^2 + D + 1)y = 0
$$

とし，初期値 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ を満たす特殊解を求めよう。

一般解は

$$
y(x) = C_1 \exp\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}x\right)
$$

なので $x = 0$ を代入すると $C_1 + C_2 = y(0) = 0$ が得られる。

$$
y'(x) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}C_1 \exp\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}C_2 \exp\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}x\right)
$$

なので $x = 0$ を代入すると

$$
\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}C_2 = 1
$$

が得られる。これを計算すると $C_1 = -\dfrac{i}{\sqrt{3}}, C_2 = \dfrac{i}{\sqrt{3}}$ となる。解は

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{i}{\sqrt{3}}\exp\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{i}{\sqrt{3}}\exp\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}x\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x
\end{aligned}
$$

演習問題 3.14　次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

(1) $y' + y\sin x = 0$　　(2) $y' + (x+1)y = 0$

(3) $y' + e^{2x}y = 0$　　(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(5) $y'' - y' - 6y = 0$　　(6) $y'' + y = 0$

(7) $y'' + 4y = 0$　　(8) $y'' - 2y' + y = 0$

(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

演習問題 3.15　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y'' + y = 0$　　(2) $y'' + \omega^2 y = 0 \quad (0 \neq \omega \in \mathbb{R})$

(3) $y'' - y' + y = 0$　　(4) $y'' - 2y' + 2y = 0$

演習問題 3.16　次が成立することを示せ。

2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

演習問題 3.17　次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。$\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x}\cos\lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x}\sin\lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

3.7 非同次型線型微分方程式

次に非同次型を扱おう。演算子法だと同次型の場合と同様に計算を実行すれば非同次型の場合も解を求めることができる。ただし積分は一般に複雑になる。

微分方程式

$$(D^2-4)y=\sin x$$

の解を求めよう。$D^2-4=(D-2)(D+2)$ なので，$(D-2)(D+2)y=\sin x$ である。$u=(D+2)y$ とおくと，u に関する微分方程式は $(D-2)u=\sin x$ となる。$D-2=e^{2x}De^{-2x}$ なので

$$e^{2x}De^{-2x}u=\sin x$$

となる。$v=e^{-2x}u$ とおくと，v に関する微分方程式は

$$Dv=e^{-2x}\sin x$$

となる。両辺を積分すると (積分は既知とする)

$$v=-\frac{2}{5}e^{-2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{-2x}\cos x+C_1$$

を得る。$e^{-2x}u=v=-\frac{2}{5}e^{-2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{-2x}\cos x+C_1$ なので

$$u=-\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x+C_1e^{2x}$$

となる。$u=(D+2)y$ より y に関する微分方程式は

$$(D+2)y=-\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x+C_1e^{2x}$$

となる。$D+2=e^{-2x}De^{2x}$ を用いて

$$e^{-2x}De^{2x}y=-\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x+C_1e^{2x}$$

と書ける。$w=e^{2x}y$ とおくと，w に関する微分方程式は

$$Dw=-\frac{2}{5}e^{2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x+C_1e^{4x}$$

となる。両辺を積分して (積分は既知とする)

$$w=-\frac{1}{5}e^{2x}\sin x+\frac{C_1}{4}e^{4x}+C_2$$

を得る。$\dfrac{C_1}{4}$ を C_1 におき直すと，

$$y = -\frac{1}{5}\sin x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

を得る。

この様に，演算子法を用いると線型微分方程式が同次型であろうと，非同次型であろうと同じ様に解を求めることができる。ただし「積分は既知とした」という部分の計算は複雑な場合もある。「積分は既知とした」部分について計算を実行してみる。ここでは

$$I = \int e^{-2x}\sin x\,dx$$

を計算する。$J = \displaystyle\int e^{-2x}\cos x\,dx$ とする。$F = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}$ とおくと，$F' = e^{-2x}$ より

$$\begin{aligned}
I =& \int F'\sin x\,dx = F\sin x - \int F(\sin x)'\,dx \\
&= F\sin x - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\cos x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin x + \frac{1}{2}J
\end{aligned}$$

となる。J を部分積分すると

$$\begin{aligned}
J =& \int F'\cos x\,dx = F\cos x - \int F(\cos x)'\,dx \\
&= F\cos x + \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\sin x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos x - \frac{1}{2}I
\end{aligned}$$

J を消去して

$$I = -\frac{2}{5}e^{-2x}\sin x - \frac{1}{5}e^{-2x}\cos x$$

を得る。

このように積分計算は難しい場合もあるので，ここでは複雑な積分計算を避けることができる次を紹介しておく。

L を線型演算子とする。$f(x) \neq 0$ とするとき

$$L(y) = f(x)$$

は非同次型の線型微分方程式である。これに関して次が成立する。

命題 3.14 L を線型演算子とし，線型微分方程式

$$L(y) = f(x) \qquad (*)$$

を考える。このとき $(*)$ から得られる同次型の微分方程式を

$$L(y) = 0 \qquad (**)$$

とする。このとき

「$(*)$ の一般解」=「$(*)$ の特殊解」+「$(**)$ の一般解」

となっている。

証明 $(*)$ の特殊解 y_0 が 1 つ与えられているとき次の 2 つを示せばよい。
(1) $(*)$ の任意の解 y に対し $(**)$ の解 y_1 が存在して $y = y_0 + y_1$ となる。
(2) $(**)$ の任意の解 y_1 に対し $y = y_0 + y_1$ は $(*)$ の解である。

ここで命題 3.13 を思い出そう。演算子 L が線型のとき
(a) 任意の関数 y_1, y_2 に対し $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
(b) 任意の定数 α と任意の関数 y に対し $L(\alpha y) = \alpha L(y)$
が成立した。

y を $(*)$ の任意の解とする。$y_1 = y - y_0$ とおくと，L は線型演算子なので $L(y_1) = L(y - y_0) = L(y) - L(y_0) = f(x) - f(x) = 0$ となる。よって y_1 は $(**)$ の解である。

$(**)$ の任意の解を y_1 とする。$y = y_0 + y_1$ とおくと，$L(y) = L(y_0 + y_1) = L(y_0) + L(y_1) = f(x) + 0 = f(x)$ となる。よって y は $(*)$ の解である。 ∎

この命題により非同次型の一般解を求めるためには非同次型の特殊解と同次型の一般解を求めればよいことが分かる。先ほどの問題を例に考えてみよう。

$$(D^2 - 4)y = \sin x \qquad (*)$$

これを解くためには

$$(D^2 - 4)y = 0 \qquad (**)$$

とするとき $(**)$ の一般解と $(*)$ の特殊解を求めればよい。$(**)$ の一般解はすでに学んでいるように

$$y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

である。

$(*)$ の特殊解は 1 個求まればよいので，解の形を予想する。$f(x) = \sin x$ なので，解は三角関数であることが予想される。よって $y_1 = a\sin x + b\cos x$ という形をしていると予想する。このとき

$$\begin{aligned}(D^2-4)y_1 &= D^2y_1 - 4y_1 \\ &= -a\sin x - b\cos x - 4a\sin x - 4b\cos x \\ &= -5a\sin x - 5b\cos x = \sin x\end{aligned}$$

を満たせばよい。よって $a = -\dfrac{1}{5}, b = 0$ となり，$y_1 = -\dfrac{1}{5}\sin x$ を得る。よって $(*)$ の一般解は

$$y = y_1 + y_2 = -\frac{1}{5}\sin x + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$$

となる。

$f(x)$ が指数関数 e^{kx} のときは $y_1 = ae^{kx}$ とおき，a を求めればよい。$f(x)$ が多項式のときは，例えば 2 次式のときは $y_1 = ax^2 + bx + c$ とおいて a, b, c を求めればよい。

演習問題 3.18　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin 2x$　　(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$