解析学 I 問題解説 $\sharp 2$

河野

1　1 変数の微分

演習問題 **1.1　$p = p_0.p_1p_2\cdots$ が A の最小上界であることを証明せよ。(以下微積分の基礎を厳密に取り扱う演習問題には $(*)$ を 2 つ付けてある。)

最初に p が A の上界であることを示す。x を A の任意の元とする。$I(x)$ および $I_k(x)$ の定義より $I(x) \le I(p) = p_0$ および任意の自然数 k に対し $I_k(x) \le I(p) = p_k$ が成立する。よって $x \le p$ である。

次は最小性を示す。結論を否定して p が最小でないとする。このとき A の上界 α で $\alpha < p$ となるものが存在する。自然数 n に対し $q_n = p_0.p_1p_2p_3\cdots p_n$ とおく。このとき $q_n \in A$ であり，任意の自然数 n に対し $q_n \le p$ かつ $p - q_n \le 10^{-n}$ が成立する。

$p - \alpha > 10^{-m}$ となる自然数 m が存在する。このとき

$$p - q_m \le 10^{-m} < p - \alpha$$

より $\alpha < q_m$ となる。$q_m \in A$ なのでこれは α が A の上界であることに矛盾する。よって証明された。

演習問題 **1.2　定理 1.2 を証明せよ

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の定義は

$$\forall\varepsilon(>0)\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ n>N\ \Longrightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon$$

である。

与えられた数列は収束しているので以下 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。

(1)　1) ε を任意の正の実数とする。a_n について，任意の ε に対して上の定義の様な N が存在するので，特に $\dfrac{\varepsilon}{2}$ に対してもある N_1 が存在する。即ち $N_1 \in \mathbb{N}$ で

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ n>N_1\ \Longrightarrow |a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。また b_n についても同様なので，$N_2 \in \mathbb{N}$ で

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ n>N_2\ \Longrightarrow |b_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。このとき $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと ($\max\{N_1, N_2\}$ は N_1 と N_2 の大きい方，$N_1 = N_2$ のときはどちらと思ってもよい)，$n > N$ となる任意の自然数 n に対し $n > N_1$ かつ $n > N_2$ が成立するので，

$$\begin{aligned}\bigl|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)\bigr| &= \bigl|(a_n-\alpha)+(b_n-\beta)\bigr|\\ &\le \bigl|a_n-\alpha\bigr| + \bigl|b_n-\beta\bigr|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

が成立する。途中で三角不等式 ($|x+y| \leq |x|+|y|$) を使用した。

2) $k=0$ のとき数列は $ka_n=0$ であり，示すべき式は $|ka_n-k\alpha|=|0-0|=0<\varepsilon$ なので成立している。よって $k\neq 0$ とする。

ε を任意の正の実数とする。任意の ε に対して上の定義の様な自然数が存在するので，特に $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ に対してもある N が存在する。即ち $N\in\mathbb{N}$ で

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ n>N \implies |a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{|k|}$$

を満たすものが存在する。このとき

$$n>N \implies |ka_n-k\alpha|=|k(a_n-\alpha)|=|k|\cdot|a_n-\alpha|<|k|\frac{\varepsilon}{|k|}=\varepsilon$$

が成立するので。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$ が成立する。

3) 最初に，収束する数列は有界であること，即ち a_n が収束するとき，

$$\exists M\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}\qquad |a_n|\leq M$$

が成立することを示す。任意の ε に対し N が存在するので，特に 1 に対しある自然数 N が存在し $n>N$ に対し $|a_n-\alpha|<1$ が成立する。このとき $-1<a_n-\alpha<1$ であり，$\alpha-1<a_n<\alpha+1$ が成立する。$M=\max\{\,|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_N|,|\alpha+1|,|\alpha-1|\,\}$ とおく。$n\leq N$ のときは $|a_n|\leq M$ が成立する。$n>N$ のときは

$$\alpha-1<a_n<\alpha+1$$

が成立する。いずれの場合も $|a_n|\leq M$ が成立するので，有界であることが示された。a_n は α に収束するので，上に述べた性質をもつ M が存在する。

定理の証明に戻る。最初に $\beta=0$ の場合を考える。ε を任意の正数とする。b_n は 0 に収束するので，ある自然数 N が存在して，任意の n に対し

$$n>N \implies |b_n|<\frac{\varepsilon}{M}$$

が成立する。このとき

$$|a_nb_n-\alpha\beta|=|a_nb_n|=|a_n|\cdot|b_n|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

となるので，この場合は証明された。よって $\beta\neq 0$ とする。

ε を任意の正数とする。b_n は β に収束するので，$\dfrac{\varepsilon}{2M}$ に対しある自然数 N_2 が存在して

$$n>N_2 \implies |b_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。また $\dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$ に対し自然数 N_1 が存在して

$$n>N_1 \implies |a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

が成立する。$N=\max\{N_1,N_2\}$ とおくと，$n>N$ のとき

$$\begin{aligned}|a_nb_n-\alpha\beta| &= |(a_nb_n-a_n\beta)+(a_n\beta-\alpha\beta)| \\ &\le |a_n|\cdot|(b_n-\beta)|+|(a_n-\alpha)|\cdot|\beta| \\ &\le M\cdot|(b_n-\beta)|+|(a_n-\alpha)|\cdot|\beta| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2|\beta|}|\beta|=\varepsilon\end{aligned}$$

となるので証明された。

4) $\beta\neq 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\beta}$$

を示せば，(3) の結果とあわせて (4) が証明される。よってこの命題を証明する。ε として $\dfrac{|\beta|}{2}$ をとると，ある自然数 N_1 が存在して，$n>N_1$ のとき

$$|b_n-\beta|<\frac{|\beta|}{2}$$

が成立する。このとき $-\dfrac{|\beta|}{2}<b_n-\beta<\dfrac{|\beta|}{2}$ が成立するので，$\beta-\dfrac{|\beta|}{2}<b_n<\beta+\dfrac{|\beta|}{2}$ が成立する。このことから $n>N_1$ のとき $|b_n|>\dfrac{|\beta|}{2}$ が成立する。また b_n は β に収束するので，$\dfrac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$ に対し自然数 N_2 が存在して $n>N_2$ のとき

$$|b_n-\beta|<\frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。$N=\max\{N_1,N_2\}$ とおくと，$n>N$ のとき

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\beta}\right|=\left|\frac{\beta-b_n}{\beta b_n}\right|=\frac{|\beta-b_n|}{|\beta|\cdot|b_n|}<\frac{2|\beta-b_n|}{|\beta|\cdot|\beta|}<\frac{2}{|\beta|\cdot|\beta|}\frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

となる。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ とし，背理法で証明する。即ち $\alpha>\beta$ が成立することを仮定する。$\varepsilon=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とする。収束の定義より

$$\begin{aligned}&\exists N_1\in\mathbb{N}\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad n>N_1\implies|a_n-\alpha|<\varepsilon\\ &\exists N_2\in\mathbb{N}\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad n>N_1\implies|b_n-\beta|<\varepsilon\end{aligned}$$

$|a_n-\alpha|<\varepsilon$ は

$$\alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon$$

と同値なので

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\alpha-\frac{\alpha-\beta}{2}<a_n<\alpha+\frac{\alpha-\beta}{2}$$

となる。

$|b_n-\beta|<\varepsilon$ は

$$\beta-\varepsilon<b_n<\beta+\varepsilon$$

より

$$\beta - \frac{\alpha-\beta}{2} < b_n < \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

となる。

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと $n > N$ のとき

$$b_n < \frac{\alpha+\beta}{2} < a_n$$

となるがこれは $a_n < b_n$ に矛盾する。よって示された。

(3)　任意の正の実数を ε とする。a_n，c_n は A に収束するので

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > N \implies A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > N \implies A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

が成立する。$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと $n > N$ のとき

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

が成立するので b_n は A に収束する。

演習問題 ****1.3**　　定理 1.3 を証明せよ

$\{a_n\}$ を上に有界な単調非減少数列とする。$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおくと集合 A は上に有界である。実数の連続性に関する公理 (ワイエルシュトラスの公理) より A には上限 (最小上界) が存在する。これを α とする。α は上界であるから

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \leq \alpha$$

が成立する。α は最小上界なので，$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\alpha - \varepsilon$ は A の上界ではない。即ち

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \ \alpha - \varepsilon < a_N$$

が成立する。このとき $n > N$ である任意の自然数 n に対し $a_N \leq a_n$ が成立する。よって

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

となる。まとめると

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成立するので，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる。

演習問題 1.4　　数列 $\{a_n\}$ が下に**有界**とは「$\exists M \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \geq M$」と定義し，$\{a_n\}$ が**単調非増加数列**であるとは「$\forall n \in \mathbb{N} \ \ a_{n+1} \leq a_n$」と定義する。定理 1.3 を用いて「下に有界な単調非増加数列は収束する」ことを証明せよ。

$b_n = -a_n$ とおく。$\{b_n\}$ が上に有界な単調非減少数列であることを示す。a_n は下に有界なので「$\exists N \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \geq N$」が成立する。このとき $M = -N$ とおくと任意の自然数 n に対し

$$b_n = -a_n \leq -N = M$$

となり b_n は上に有界である。また a_n は単調減少数列なので任意の自然数 n に対し

$$a_{n+1} \leq a_n$$

が成立している。このとき

$$b_{n+1} = -a_{n+1} \geq -a_n = b_n$$

となるので，b_n は単調増加数列である。定理 1.3 より b_n は収束する。$\lim_{n\to\infty} b_n = B$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-b_n) = -\lim_{n\to\infty} b_n = -B$$

となるので a_n も収束する。

演習問題 1.5　数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ で帰納的に定義される数列とする。
(1)　任意の自然数 n に対し $a_{n+1} - a_n \geq 0$ が成立することを数学的帰納法で示せ。
(2)　任意の自然数 n に対し $a_n \leq 2$ が成立することを示せ。

(1)　$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 1 = 1$ なので $a_{1+1} - a_1 = 1 - 0 = 1 \geq 0$ であり，$n = 1$ のとき命題は成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する，即ち $a_{k+1} - a_k \geq 0$ の成立を仮定する。このとき $a_{k+2} = \frac{1}{2}a_{k+1} + 1, a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + 1$ なので

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_{k+1} &= \left(\frac{1}{2}a_{k+1} + 1\right) - \left(\frac{1}{2}a_k + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{k+1} - a_k\right) \end{aligned}$$

となる。$a_{k+1} - a_k \geq 0$ なので $a_{k+2} - a_{k+1} \geq 0$ が成立する。$n = k+1$ のときも命題が成立しているので，数学的帰納法により示された。
(2)　$a_1 = 0 \leq 2$ なので $n = 1$ のとき成立している。(1) の結果より a_n は単調増加なので，任意の自然数 n に対し $a_n \geq 0$ である。$n = k$ のとき成立を仮定する，即ち $a_k \leq 2$ の成立を仮定する。このとき

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + 1 \leq \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

なので $n = k+1$ のときも成立する。

演習問題 1.6　数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n - 1$ で帰納的に定義される数列とするとき，$a_n = 1 - 2^{n-1}$ が成立することを示せ。

$$1 - 2^{1-1} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = a_1$$

なので $n = 1$ のとき $a_n = 1 - 2^{n-1}$ は成立している。
　$n = k$ のとき成立を仮定する，即ち $a_k = 1 - 2^{k-1}$ の成立を仮定する。

$$a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2\left(1 - 2^{k-1}\right) - 1 = 1 - 2^k = 1 - 2^{(k+1)-1}$$

となるので $n=k+1$ のときも成立している。

演習問題 ****1.7**　　定理 1.5 を証明せよ。

$\lim_{x\to a} f(x)=a$ の定義は

$$\forall\varepsilon(>0)\in\mathbb{R}\ \exists\delta(>0)\in\mathbb{R}\ \forall x\ \ 0<|x-a|<\delta\ \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

が成立することである。

以下 $\lim_{x\to a} f(x)=A, \lim_{x\to a} f(x)=B$ とする。

(1)　1) $\varepsilon>0$ を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して，任意の x に対し

$$0<|x-a|<\delta_1\ \Longrightarrow |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して，任意の x に対し

$$0<|x-a|<\delta_2\ \Longrightarrow |g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。このとき $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおく。ここで $\min\{\delta_1,\delta_2\}$ は δ_1 と δ_2 の小さい方，$\delta_1=\delta_2$ のときはどちらと思ってもよい。

$0<|x-a|<\delta$ のとき $0<|x-a|<\delta_1$ および $0<|x-a|<\delta_2$ が成立するので

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)-(A+B)|&=|(f(x)-A)+(g(x)-B)|\\&\leq|f(x)-A|+|g(x)-B|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

となる。

2) $k=0$ の場合は $kf(x)$ は恒等的に 0 なので成立している。よって $k\neq0$ とする。任意の正数 ε に対して上の様な δ が存在するので，特に $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ に対し $\delta>0$ が存在して $0<|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ を満たす。このとき

$$|kf(x)-kA|=|k(f(x)-A)|=|k|\cdot|f(x)-A|<|k|\frac{\varepsilon}{|k|}=\varepsilon$$

となるので証明された。

3) 1 に対しある正数 δ_0 が存在し，任意の x に対し

$$0<|x-a|<\delta_0\ \Longrightarrow |f(x)-A|<1$$

が成立している。このとき $M=\max\{|A+1|,|A-1|\}$ とおくと $0<|x-a|<\delta_0$ のとき $|f(x)|\leq M$ が成立する。

最初に $B=0$ の場合を考える。ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の x に対し $0<|x-a|<\delta_1\ \Longrightarrow |g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ が成立する。$\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$ とおくと，任意の x に対し $0<|x-a|<\delta$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB|&=|f(x)g(x)|=|f(x)|\cdot|g(x)|\\&<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon\end{aligned}$$

が成立する。この場合は証明された。

よって $B \neq 0$ とする。ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の x に対し

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して任意の x に対し

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。$\delta = \min\{\,\delta_0, \delta_1, \delta_1\,\}$ とおく。$0 < |x-a| < \delta$ となる x に対し

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-AB| &= |f(x)g(x)-f(x)B+f(x)B-AB| \\ &\leq |f(x)g(x)-f(x)B| + |f(x)B-AB| \\ &= |f(x)|\cdot|g(x)-B| + |f(x)-A|\cdot|B| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|B|}|B| = \varepsilon \end{aligned}$$

となり，この場合も成立する。

4) 数列のときと同様に $B \neq 0$ のとき

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

を示せば，3) と組み合わせて 4) が証明される。

ε として $\dfrac{|B|}{2}$ をとると，正数 δ_1 が存在して，$0 < |x-a| < \delta_1$ のとき，

$$|g(x)-B| < \frac{|B|}{2}$$

が成立する。このとき $|g(x)| > \dfrac{|B|}{2}$ が成立する。

$g(x)$ は B に収束するので，任意の ε に対してある正数 δ_2 が存在して，$0 < |x-a| < \delta_2$ となる任意の x に対し

$$|g(x)-B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。このとき $\delta = \min\{\,\delta_1, \delta_2\,\}$ とおくと $0 < |x-a| < \delta$ となる任意の x に対し

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-g(x)}{g(x)B}\right| &= \frac{|B-g(x)|}{|g(x)|\cdot|B|} \\ &< \frac{2|B-g(x)|}{|B|^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。

(2)　結論が成立しないと仮定すると，$A > B$ が成立している。$\varepsilon = \dfrac{A-B}{2}$ とおくと $\varepsilon > 0$ なので $\delta_1 > 0$ が存在して

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x)-A| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |f(x)-A|<\varepsilon &\implies -\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon \\ &\implies A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \\ &\implies A-\frac{A-B}{2}<f(x)<A+\frac{A-B}{2} \\ &\implies \frac{A+B}{2}<f(x)<A+\frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき $\dfrac{A+B}{2}<f(x)$ が成立している。

　また $\delta_2>0$ が存在して

$$0<|x-a|<\delta_2 \implies |g(x)-B|<\varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |g(x)-B|<\varepsilon &\implies -\varepsilon<g(x)-B<\varepsilon \\ &\implies B-\varepsilon<g(x)<B+\varepsilon \\ &\implies B-\frac{A-B}{2}<g(x)<B+\frac{A-B}{2} \\ &\implies B-\frac{A-B}{2}<g(x)<\frac{A+B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき $g(x)<\dfrac{A+B}{2}$ が成立している。$\delta=\min\{\,\delta_1,\delta_2\,\}$ とおくと $0<|x-a|<\delta$ となる x に対し

$$g(x)<\frac{A+B}{2}<f(x)$$

が成立する。これは矛盾，よって結論が正しいことが示される。

(3)　任意の正数 ε に対し，ある δ_1 が存在して

$$0<|x-a|<\delta_1 \implies |f(x)-A|<\varepsilon$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して

$$0<|x-a|<\delta_2 \implies |h(x)-A|<\varepsilon$$

が成立する。$\delta=\min\{\,\delta_1,\delta_2\,\}$ とおくと x が $0<|x-a|<\delta$ を満たすとき

$$A-\varepsilon<f(x)\leq g(x)\leq h(x)<A+\varepsilon$$

が成立するので $|g(x)-A|<\varepsilon$ が成立する。よって $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=A$ である。