

演習問題 \*2.1 次の  $D$  に対し  $\partial D$  を求めよ。

- (1)  $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$   
 (2)  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, -2 < y < \sin \frac{1}{x} \right\}$   
 (3)  $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \}$

$D$  の内点全体の集合を  $I$ , 外点全体の集合を  $X$  とする。 $O = (0, 0)$  を原点とする。

- (1)  $\partial D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$  であることを示す。そのために  $I = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$ ,  $X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1 \}$  を示せばよい。

$J = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$  とおき,  $P = (x, y)$  を  $J$  の任意の点とする。このとき  $x^2 + y^2 < 1$  なので  $\varepsilon = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  とおくと  $\varepsilon > 0$  である。 $U_\varepsilon(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(Q, P) < \varepsilon \}$  とおく。 $Q = (x', y')$  を  $U_\varepsilon(P)$  の任意の点とする

$$x'^2 + y'^2 = d(Q, O) \leq d(Q, P) + d(P, O) < \varepsilon + \sqrt{x^2 + y^2} < 1$$

となるので  $U_\varepsilon(P) \subseteq D$  が成立する。よって  $P$  は  $D$  の内点であり,  $P \in I$  が成立する。

逆に  $P = (x, y)$  を  $D$  の内点 (即ち  $P \in I$ ) とすると, ある正の実数  $\varepsilon$  が存在して  $U_\varepsilon(P) \subseteq D$  となる。 $P = O = (0, 0)$  のときは  $P \in J$  なので  $d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$  とする。

このとき

$$Q = (x', y') = \left( x + \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, y + \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

とおくと  $d(P, Q) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$  より  $Q \in U_\varepsilon(P) \subseteq D$  である。

$$\begin{aligned} d(Q, O) &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left( x + \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left( y + \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + y^2 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2) \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= d(P, O) \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

$d(Q, O) \leq 1$  より  $d(P, O) < 1$  となり,  $P \in J$  となる。よって  $I = J$  が示された。

$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1 \}$  とおく。 $P = (x, y)$  を  $K$  の任意の点とする。 $d(P, O) > 1$  なので  $\varepsilon = d(P, O) - 1$  とおくと  $\varepsilon > 0$  である。 $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$  であることを示せば,  $P$  は  $D$  の外点になり,  $K \subseteq X$  が示される。 $Q = (x', y')$  を  $U_\varepsilon(P)$  の任意の点とする。 $d(P, Q) < \varepsilon$  なので

$$1 + \varepsilon = d(P, O) \leq d(P, Q) + d(Q, O) < \varepsilon + d(Q, O)$$

より  $1 < d(Q, O)$  となる。よって  $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$  である。

逆に  $P$  を  $D$  の外点とする。ある正の実数  $\varepsilon$  が存在して  $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$  となっている。

このとき

$$Q = (x', y') = \left( x - \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, y - \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

とおくと  $d(P, Q) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$  より  $Q \in U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$  である。

$$\begin{aligned} d(Q, O) &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left( x - \frac{\varepsilon x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left( y - \frac{\varepsilon y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + y^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= d(P, O) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

$d(Q, O) > 1$  より  $d(P, O) > 1$  となり,  $P \in K$  となる。よって  $X = K$  が示された。

$$(2) \quad L_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = \sin \frac{1}{x} \right\}, L_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, -2 < y \leq \sin 1 \right\},$$

$$L_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = -2 \right\}, L_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -2 \leq y \leq 1 \right\},$$

$E = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$  とおくとき,  $\partial D = E$  であることを示す。

最初に  $D$  の点は  $D$  の内点であることを示す。  $P = (x_0, y_0) \in D$  とする。

$$\varepsilon_1 = y_0 - (-2), \varepsilon_2 = x_0, \varepsilon_3 = 1 - x_0, \varepsilon_4 = \inf \left\{ d \left( (x, \sin \frac{1}{x}), (x_0, y_0) \right) \mid 0 < x \leq 1 \right\} \text{ とおく。}$$

$n$  を  $\frac{1}{(2n - \frac{1}{2})\pi} < x_0$  を満たす自然数とすると

$$\varepsilon_4 = \inf \left\{ d \left( (x, \sin \frac{1}{x}), (x_0, y_0) \right) \mid \frac{1}{(2n - \frac{1}{2})\pi} \leq x \leq 1 \right\}$$

が成立するが, 最大値定理より

$$\varepsilon_4 = \min \left\{ d \left( (x, \sin \frac{1}{x}), (x_0, y_0) \right) \mid \frac{1}{(2n - \frac{1}{2})\pi} \leq x \leq 1 \right\}$$

が成立するので  $\varepsilon_4 > 0$  である。

$$\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \}$$

とおくと

$$U_\varepsilon(P) \subseteq D$$

が成立するので  $P$  は  $D$  の内点である。逆に  $P$  を  $D$  の内点とすると, ある正の実数  $\varepsilon$  が存在して  $U_\varepsilon(P) \subseteq D$  となるので  $P \in D$  である。よって  $I = D$  である。

$K = \mathbb{R}^2 - D - E$  とおくととき,  $X = K$  を示す。  $P = (x_0, y_0) \in K$  とすると (1)  $y_0 < -2$ , または (2)  $x_0 < 0$ , または (3)  $x_0 > 1$ , または (4)  $0 < x_0 \leq 1$  かつ  $y_0 > \sin \frac{1}{x_0}$ , (5)  $x_0 = 0$  かつ  $y_0 > 1$  が成立している。

(1) のときは  $\varepsilon = |y_0 - (-2)|$  とおくと  $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$  となっている。(2) のときは  $\varepsilon = |x_0 - 0|$  とおくと  $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$  となっている。(3) のときは  $\varepsilon = |x_0 - 1|$  とおくと  $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$  となっている。

(4) のときは  $\varepsilon = \inf \left\{ d \left( \left( x, \sin \frac{1}{x} \right), (x_0, y_0) \right) \mid 0 < x \leq 1 \right\}$  とおく。  $n$  を  $\frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} < x_0$  を満たす自然数とすると

$$\varepsilon = \inf \left\{ d \left( \left( x, \sin \frac{1}{x} \right), (x_0, y_0) \right) \mid \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} \leq x \leq 1 \right\}$$

が成立するが, 最大値定理より

$$\varepsilon = \min \left\{ d \left( \left( x, \sin \frac{1}{x} \right), (x_0, y_0) \right) \mid \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} \leq x \leq 1 \right\}$$

が成立するので  $\varepsilon > 0$  である。

$$U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$$

が成立するので  $P$  は  $D$  の外点である。

(5) のときは  $y_0 - 1 = \varepsilon$  とおくと  $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$  となるので外点である。

逆に  $D$  の外点は  $K$  に含まれることを示せば  $X = K$  が分かる。 $D$  は  $D$  の内点なので外点ではない。よって  $L_1, L_2, L_3, L_4$  が外点でないことを示せばよい。 $\varepsilon$  を任意の正の実数とする。

$P = (x_0, y_0) \in L_1$  とする  $x = x_0, y = \max \left\{ y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$  とおく。 $Q = (x, y)$  とすると  $Q = (x, y) \in D$  となる。

$$d(P, Q) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので  $Q \in U_\varepsilon(P)$  となり, よって  $P$  は外点でない。

$P = (x_0, y_0) \in L_2$  とする。 $y_0 = \sin 1$  のときは  $x = \max \left\{ x_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right\}, y = \max \left\{ y_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2} \right\}$  とおく。 $y_0 \neq \sin 1$  のときは  $x = \max \left\{ x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} \right\}, y = y_0$  とおく。 $Q = (x, y) \in D$  となる。

$$d(P, Q) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので  $Q \in U_\varepsilon(P)$  となり, よって  $P$  は外点でない。

$P = (x_0, y_0) \in L_3$  とする。 $x_0 = 1$  のときは  $x = \max \left\{ x_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right\}, y = \min \left\{ y_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2} \right\}$  とおく。 $x_0 \neq 1$  のときは  $x = x_0, y = \min \left\{ y_0 + \frac{\varepsilon}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$  とおく。 $Q = (x, y)$  とすると  $Q = (x, y) \in D$  となる。

$$d(P, Q) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので  $Q \in U_\varepsilon(P)$  となり, よって  $P$  は外点でない。

$P = (x_0, y_0) \in L_4$  とする。 $y_0 = -2$  のときは  $x = \max \left\{ x_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right\}, y = \min \left\{ y_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2} \right\}$  とおく。 $-2 < y_0 < -1$  のときは  $x = \min \left\{ x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} \right\}, y = y_0$  とおく。 $y_0 = -1$  のときは  $x = \min \left\{ x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} \right\}, y = \min \left\{ y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$  とおく。 $-1 < y_0 < 1$  のとき次のような数列  $\{\alpha_n\}$  が存在する;  $\{\alpha_n\}$  は (1) 0 に収束する単調減少数列であり, (2)  $(\alpha_n, y_0) \in D$  を満たす。このことを示すのは最後にまわして, これを使って議論を進める。 $\alpha_n$  は 0 に収束するので,  $0 < \alpha_n < \varepsilon$  となる  $n$  が存在する。このとき  $x = \alpha_n, y = y_0$  とおく。 $y_0 = 1$  のとき  $y_1 = \max \left\{ y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} \right\}$  とすると,  $-1 < y_1 < 1$  なので  $y_1$  に対し  $\{\alpha_n\}$  と同じ性質をもつ数列  $\{\beta_n\}$  が存在する。この  $\beta_n$  に対し  $0 < \beta_n < \frac{\varepsilon}{2}$  を満たす自然数  $n$  が存在する。このとき  $x = \beta_n, y = y_1$  とする。 $Q = (x, y)$  とすると  $Q = (x, y) \in D$  となる。

$$d(P, Q) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

なので  $Q \in U_\varepsilon(P)$  となり, よって  $P$  は外点でない。

以上により  $\partial D = E$  である。

残っている (1) 0 に収束する単調減少数列であり, (2)  $(\alpha_n, y_0) \in D$  を満たす数列  $\{\alpha_n\}$  の存在を示す。

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sin \frac{1}{x} = y_0, 0 < x < 1 \right\}$$

とする。 $\frac{1}{x} = X$  とおくと  $A = \left\{ \frac{1}{X} \in \mathbb{R} \mid \sin X = y_0, X > 0 \right\}$  と表されるので  $A$  は空集合ではない。 $\sin \frac{1}{x} = y_0$  のとき

$$\sin \frac{1}{x} = \sin \left( \frac{1}{x} + 2n\pi \right) = \sin \left( \frac{1 + 2n\pi x}{x} \right) = \sin \left( \frac{1}{\frac{1 + 2n\pi x}{x}} \right)$$

となるので  $x \in A$  ならば  $\frac{1}{\frac{1 + 2n\pi x}{x}} \in A$  である。言い換えると  $A$  の中にはいくらでも 0 に近い元が存在する。よって  $A$  の元すべてを大きい順に

$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \dots$$

と番号付ける。

$$K_n = \{ (x, y_0) \mid \beta_{n+1} < x < \beta_n \}$$

とおくと, 任意の自然数  $n$  に対し  $K_{2n-1} \subseteq D$  が成立するが, または任意の自然数  $n$  に対し  $K_{2n} \subseteq D$  が成立する。前者の場合は  $\beta_{2n} < \alpha_n < \beta_{2n-1}$ , 後者の場合は  $\beta_{2n+1} < \alpha_n < \beta_{2n}$  を満たすように  $\alpha_n$  を決めると求めるものが得られる。

(3)  $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$  とおくと  $\partial D = E$  を示す。「普通」の集合  $D$  の場合  $\partial D$  は 1 次元的であるが, この例では  $\partial D$  が 2 次元的になっている。 $E$  の任意の点  $P$  が境界点であることを示す。そのために任意の正の実数  $\varepsilon$  に対し  $U_\varepsilon(P)$  は  $D$  に含まれる点も  $D$  に含まれない点も含むことを示す。

実数に対しいくらでも近くに有理数が存在する。きちんと書くと

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{Q} \quad |x - q| < \varepsilon$$

が成立する。これを用いると

$$\forall P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists Q = (x', y') \in \mathbb{Q}^2 \quad d(P, Q) < \varepsilon$$

の成立が分かる。

また実数に対しいくらでも近くに無理数が存在する。きちんと書くと

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad |x - q| < \varepsilon$$

が成立する。これを用いると

$$\forall P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists Q = (x', y') \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \quad d(P, Q) < \varepsilon$$

の成立が分かる。この2つを用いると  $P = (x, y) \in E$  と任意の正の実数  $\varepsilon$  に対し

$$\exists Q = (x', y') \in D \quad d(P, Q) < \varepsilon, \quad \exists R = (x'', y'') \notin D \quad d(P, R) < \varepsilon$$

が示される。

演習問題 \*\*2.2 定理 2.4 を証明せよ。

$P = (x, y), P_0 = (a, b)$  とする。  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$  の定義は

$$\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R} \quad \exists \delta (> 0) \in \mathbb{R} \quad \forall P \quad 0 < d(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - A| < \varepsilon$$

が成立することである。ここで  $d(P, P_0) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  である。

$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A, \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = B$  とする。

(1) 1)  $\varepsilon > 0$  を任意の正数とする。ある正数  $\delta_1$  が存在して、任意の  $P$  に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。またある正数  $\delta_2$  が存在して、任意の  $P$  に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |g(P) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。このとき  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  とおく。  $0 < d(P, P_0) < \delta$  のとき

$$\begin{aligned} |f(P) + g(P) - (A + B)| &= |(f(P) - A) + (g(P) - B)| \\ &\leq |f(P) - A| + |g(P) - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる。

2)  $k = 0$  の場合は  $kf(P)$  は恒等的に  $0$  なので成立している。よって  $k \neq 0$  とする。任意の正数  $\varepsilon$  に対して上の様な  $\delta$  が存在するので、特に  $\frac{\varepsilon}{|k|}$  に対し  $\delta > 0$  が存在して  $0 < d(P, P_0) < \delta$  ならば  $|f(P) - A| < \frac{\varepsilon}{|k|}$  を満たす。このとき

$$|kf(P) - kA| = |k(f(P) - A)| = |k| \cdot |f(P) - A| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

となるので証明された。

3) 1 に対しある正数  $\delta_0$  が存在し、任意の  $P$  に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_0 \implies |f(P) - A| < 1$$

が成立している。このとき  $M = \max\{|A+1|, |A-1|\}$  とおくと  $0 < d(P, P_0) < \delta_0$  のとき  $|f(P)| \leq M$  が成立する。

最初に  $B = 0$  の場合を考える。 $\varepsilon$  を任意の正数とする。ある正数  $\delta_1$  が存在して任意の  $P$  に対し  $0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |g(P)| < \frac{\varepsilon}{M}$  が成立する。 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$  とおくと、任意の  $P$  に対し  $0 < d(P, P_0) < \delta$  のとき

$$\begin{aligned} |f(P)g(P) - AB| &= |f(P)g(P)| = |f(P)| \cdot |g(P)| \\ &< M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。この場合は証明された。

よって  $B \neq 0$  とする。 $\varepsilon$  を任意の正数とする。ある正数  $\delta_1$  が存在して任意の  $P$  に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$$

が成立する。またある正数  $\delta_2$  が存在して任意の  $P$  に対し

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |g(P) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$  とおく。 $0 < d(P, P_0) < \delta$  となる  $P$  に対し

$$\begin{aligned} |f(P)g(P) - AB| &= |f(P)g(P) - f(P)B + f(P)B - AB| \\ &\leq |f(P)g(P) - f(P)B| + |f(P)B - AB| \\ &= |f(P)| \cdot |g(P) - B| + |f(P) - A| \cdot |B| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|B|} |B| = \varepsilon \end{aligned}$$

となり、この場合も成立する。

4)  $B \neq 0$  のとき

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{1}{g(P)} = \frac{1}{B}$$

を示せば、3) と組み合わせて 4) が証明される。

$\varepsilon$  として  $\frac{|B|}{2}$  をとると、正数  $\delta_1$  が存在して、 $0 < d(P, P_0) < \delta_1$  のとき、

$$|g(P) - B| < \frac{|B|}{2}$$

が成立する。このとき  $|g(P)| > \frac{|B|}{2}$  が成立する。

任意の  $\varepsilon$  に対して,  $g(P)$  は  $B$  に収束するので, ある正数  $\delta_2$  が存在して,  $0 < d(P, P_0) < \delta_2$  となる任意の  $P$  に対し

$$|g(P) - B| < \frac{|B|^2}{2}\varepsilon$$

が成立する。このとき  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  とおくと  $0 < d(P, P_0) < \delta$  となる任意の  $P$  に対し

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(P)} - \frac{1}{B} \right| &= \left| \frac{B - g(P)}{g(P)B} \right| = \frac{|B - g(P)|}{|g(P)| \cdot |B|} \\ &< \frac{2|B - g(P)|}{|B|^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。

(2) 結論が成立しないと仮定すると,  $A > B$  が成立している。  $\varepsilon = \frac{A - B}{2}$  とおくと  $\varepsilon > 0$  なので  $\delta_1 > 0$  が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |f(P) - A| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < f(P) - A < \varepsilon \\ &\implies A - \varepsilon < f(P) < A + \varepsilon \\ &\implies A - \frac{A - B}{2} < f(P) < A + \frac{A - B}{2} \\ &\implies \frac{A + B}{2} < f(P) < A + \frac{A - B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき  $\frac{A + B}{2} < f(P)$  が成立している。

また  $\delta_2 > 0$  が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |g(P) - B| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |g(P) - B| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < g(P) - B < \varepsilon \\ &\implies B - \varepsilon < g(P) < B + \varepsilon \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(P) < B + \frac{A - B}{2} \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(P) < \frac{A + B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき  $g(P) < \frac{A + B}{2}$  が成立している。  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  とおくと  $0 < d(P, P_0) < \delta$  となる  $P$  に対し

$$g(P) < \frac{A + B}{2} < f(P)$$

が成立する。これは矛盾，よって結論が正しいことが示される。

(3) 任意の正数  $\varepsilon$  に対し，ある  $\delta_1$  が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_1 \implies |f(P) - A| < \varepsilon$$

が成立する。またある正数  $\delta_2$  が存在して

$$0 < d(P, P_0) < \delta_2 \implies |h(P) - A| < \varepsilon$$

が成立する。 $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  とおくと  $P$  が  $0 < d(P, P_0) < \delta$  を満たすとき

$$A - \varepsilon < f(P) \leq g(P) \leq h(P) < A + \varepsilon$$

が成立するので  $|g(P) - A| < \varepsilon$  が成立する。よって  $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = A$  である。

演習問題 2.3 次の極限值が存在するかどうかを調べ，存在するときは極限值を求めよ。

(1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y - 1}$

(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

(4)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}$

(5)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$

(1) 分母の極限は 0 ではないので

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2}{x + y - 1} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2 + 2)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y - 1)} = \frac{2}{-1} = -2$$

(2)  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とおくと  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  と  $r \rightarrow 0$  は同じである。ただし  $\theta$  は任意に変化可能である。

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{r^2} = r (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

となる。 $|\cos \theta| \leq 1, |\sin \theta| \leq 1$  より

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq r |\cos^3 \theta + \sin^3 \theta| \leq r (|\cos^3 \theta| + |\sin^3 \theta|) \leq 2r$$

よって  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$  である。

(3)  $x = 1 + r \cos \theta, y = 1 + r \sin \theta$  とおくと  $(x, y) \rightarrow (1, 1)$  と  $r \rightarrow 0$  は同じである。

$$\frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

となるので (2) と同様に

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^3 + (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$$



となる。

(4)  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とおく。

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r \cos^3 \theta + r \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}$$

分子は (2) と同様に

$$|r \cos^3 \theta + r \sin^3 \theta| \leq 2r$$

となる。分母は

$$\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta = 1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

とできるので  $-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$  より

$$\frac{1}{2} \leq \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta \leq \frac{3}{2}$$

これより

$$0 < \frac{1}{\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta} \leq 2$$

が成立する。よって

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \right| \leq 4r$$

となるので極限值は 0 である。

(5)  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とおく。

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}$$

$\theta = 0$  として  $r \rightarrow 0$  とすると極限值は 1 であり,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  として  $r \rightarrow 0$  とすると極限值は  $\frac{2}{3}$  であ

る。よって  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$  は存在しない。

演習問題 \*\*2.4 定理 2.8 を証明せよ。

$D$  を有界閉領域とし,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  を連続な関数とする。1 変数の証明と同様に最初に  $f$  が有界であることを示す。そのために  $f$  が有界でないと仮定して矛盾を導く。任意の自然数  $n$  に対し  $D$  の点  $P_n = (x_n, y_n)$  で  $f(P_n) > n$  となる点が存在する。 $A = \{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  と置く。収束する部分数列を以下の様を選ぶ。ここで長方形領域に対し次の記法を定義する。

$$R(a, b, c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

$D$  は有界なのである長方形領域  $R(a, b, c, d)$  で  $D \subseteq R(a, b, c, d)$  となるものが存在する。 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d, \alpha(1) = 1$  とする。 $e_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, f_1 = \frac{c_1 + d_1}{2}$  と置き,  $R(a, b, c, d)$  を 4 つの長方形領域

$$R(a_1, e_1, c_1, f_1), \quad R(a_1, e_1, f_1, d_1), \quad R(e_1, b_1, c_1, f_1), \quad R(e_1, b_1, f_1, d_1)$$

に分けると、4つのどれかは  $A$  の点を無限個含んでいる。無限個含んでいるものを選び、その頂点を  $a_2, b_2, c_2, d_2$  とする。例えば  $R(a_1, e_1, c_1, f_1)$  が選ばれたときは  $a_2 = a_1, b_2 = e_1, c_2 = c_1, d_2 = f_1$  とする。また  $R(a_2, b_2, c_2, d_2)$  に含まれる  $D$  の点で  $n > \alpha(1)$  となるものが存在するので、その点を  $P_{\alpha(2)}$  とする。この操作を続けることにより点列  $\{P_{\alpha(n)}\}$  が定まる。 $a_n, c_n$  は上に有界な単調増加数列であり、 $b_n, d_n$  は下に有界な単調減少数列である。

$$a_n \leq x_{\alpha(n)} \leq b_n, \quad c_n \leq y_{\alpha(n)} \leq d_n$$

であり、

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a), \quad d_n - c_n = \frac{1}{2^{n-1}}(d - c)$$

なので  $x_{\alpha(n)}, y_{\alpha(n)}$  は収束する。よって  $P_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\alpha(n)}$  とおくと、 $D$  が閉集合ということから  $P_0 \in D$  が分かる。どうしてかという、 $\forall \varepsilon > 0$  に対し  $d(P_{\alpha(n)}, P_0) < \varepsilon$  となる点  $P_{\alpha(n)}$  が存在するので、 $P_0$  は  $D$  の外点ではない。よって  $P_0$  は  $D$  の内点か境界点である。内点ならば  $P_0 \in D$  であるし、境界点ならば、閉集合ということから  $\partial D \subseteq D$  となるので、やはり  $P_0 \in D$  である。 $f$  は連続なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_{\alpha(n)}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\alpha(n)}) = f(P_0)$$

となるが、 $f(P_{\alpha(n)}) > \alpha(n) \geq n$  なので  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_{\alpha(n)}) = \infty$  となる。これは矛盾なので、最初の「有界でない」という仮定が正しくない。よって有界が証明された。

$X = \{f(P) \mid P \in D\}$  とおくと  $X$  は有界なので上限  $M = \sup X$  が存在する。 $f(P) = M$  となる点  $P$  が存在すれば  $P$  は最大値を与えるので、 $f(P) = M$  となる点  $P$  が存在しないとする。このとき  $g(P) = \frac{1}{M - f(P)}$  は  $D$  で定義される連続関数であるが上に有界でない。これは示したことに矛盾するので、 $f(P) = M$  となる点  $P$  は存在する。これが最大値を与える。

**演習問題 2.5** 上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求め、原点において偏微分可能であることを確認せよ。

$z = f(x, y)$  が原点において連続であるとは  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$  が成立することである。原点で連続でないことを示すには、この極限が存在しないか、存在しても  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$  でないことを示せばよい。

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  において極座標で考える。 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  と  $r \rightarrow 0$  は同値である。 $f(x, y) = \frac{r \cos \theta r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$  となるので極限値は  $\theta$  に依存する。たとえば  $\theta = 0$  のときは 0 であるが  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のときは  $\frac{1}{2}$  である。2変数の極限の定義よりこれは収束しない。よって  $f(x, y)$  は  $(0, 0)$  で連続ではない。偏導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0k}{0^2 + k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0 \end{aligned}$$

である。

演習問題 2.6  $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で全微分可能のとき  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で偏微分可能であり,  $A = f(a, b), B = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), C = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  となることを示せ。

$$f(a+h, b+k) = A + Bh + Ck + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

において  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  とすると  $f(a, b) = A$  が得られる。

$f(a+h, b+k)$  に  $k=0$  を代入すると,

$$f(a+h, b) = f(a, b) + Bh + \varepsilon(h, 0)\sqrt{h^2 + 0^2}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Bh + \varepsilon(h, 0)\sqrt{h^2 + 0^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( B + \varepsilon(h, 0)\frac{|h|}{h} \right) = B \end{aligned}$$

$f$  は  $x$  に関して偏微分可能であり,  $f_x(a, b) = B$  となる。

$f(a+h, b+k)$  に  $h=0$  を代入すると,

$$f(a, b+k) = f(a, b) + Ck + \varepsilon(0, k)\sqrt{0^2 + k^2}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Ck + \varepsilon(0, k)\sqrt{0^2 + k^2}}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left( C + \varepsilon(0, k)\frac{|k|}{k} \right) = C \end{aligned}$$

$f$  は  $y$  に関して偏微分可能であり,  $f_y(a, b) = C$  となる。

演習問題 \*2.7 定理 2.11 を証明せよ。

$f_x$  が連続であるとする。

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b)$$

と変形して 1 変数の結果を使う。  $\varepsilon_1(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)}{h} - f_x(a, b+k)$  とおくと

$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h, k) = 0$  であり,  $\varepsilon_1(k) = \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} - f_y(a, b)$  とおくと  $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_1(k) = 0$  である。

また  $f_x$  は連続なので  $\delta(k) = f_x(a, b+k) - f_x(a, b)$  とおくと  $\lim_{k \rightarrow 0} \delta(k) = 0$  である。このとき

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) &= \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{f_x(a, b+k)h + \varepsilon_1(h, k)h + f_y(a, b)k + \varepsilon_1(k)k - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{f_x(a, b)h + \delta(k)h + \varepsilon_1(h, k)h + \varepsilon_1(k)k - f_x(a, b)h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{\delta(k)h + \varepsilon_1(h, k)h + \varepsilon_1(k)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

が成立する。

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1, \quad \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$$

が成立するので

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h, k)| &\leq \left| \frac{\delta(k)h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{\varepsilon_1(h, k)h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{\varepsilon_1(k)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\leq |\delta(k)| \left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + |\varepsilon_1(h, k)| \left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + |\varepsilon_1(k)| \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\leq |\delta(k)| + |\varepsilon_1(h, k)| + |\varepsilon_1(k)| \end{aligned}$$

となり  $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$  が示される。

演習問題 2.8 演習問題 2.5 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

$f(x, y)$  が  $(a, b)$  で全微分可能であることの定義は

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくとき  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立することである。

$(x, y) = (0, 0)$  のとき

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) &= \frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{hk}{h^2 + k^2} - 0 - 0h - 0k \\ &= \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

となる。  $h = r \cos \theta, k = r \sin \theta$  とおくと

$$\varepsilon(h, k) = \frac{r \cos \theta r \sin \theta}{((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2)\sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{r}$$

となる。  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  と  $r \rightarrow 0$  は同値なので  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r}$  となる。これは収束しないので  $f$  は  $(0, 0)$  において全微分可能ではない。

全微分可能な関数は連続であるので、そのことを使った別解もある。まずある点で全微分可能な関数はその点で連続であることを示す。 $z = f(x, y)$  が  $(a, b)$  で全微分可能のとき

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくとき  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立している。この式は

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

となる。このとき

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) = f(a, b)$$

となるので  $(a, b)$  で連続である。

よって問題の関数が  $(0, 0)$  で全微分可能であるとすると  $(0, 0)$  で連続である。しかし演習問題 2.5 よりこの関数は  $(0, 0)$  で連続ではない。よって全微分可能ではない。