

演習問題 \*2.26 定理 2.23 を証明せよ。

$(a, b)$  の近傍を  $U = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \right\}$  とする。これから考える点はすべてこの近傍に含まれているとする。

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) \quad (1)$$

とおく。 $F(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$  とおくと  $\Delta = F(a+h) - F(a)$  である。また  $F'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x, b)$  が成立する。平均値の定理を  $F(x)$  に適用すると

$$F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} \Delta &= F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta h) \\ &= h(f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)) \end{aligned}$$

さらに平均値の定理を適用すると

$$= hkf_{xy}(a+\theta h, b+\theta'k) \quad (0 < \theta' < 1)$$

となる。 $f_{xy}$  は連続なので

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} = f_{xy}(a, b) \quad (2)$$

が成立する。

また

$$\frac{\Delta}{hk} = \frac{1}{h} \left( \frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \right)$$

より  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk} = \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h}$  となる。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk}$  なので  $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk}$  は収束し

$$\begin{aligned} f_{yx}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} \\ &= f_{xy}(a, b) \end{aligned}$$

となる。

演習問題 2.27 定理 2.23 を仮定して次を示せ。

(1)  $z = f(x, y)$  が  $C^3$  級ならば

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}, \quad z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy}$$

が成立する。

(2) \*  $z = f(x, y)$  が  $C^n$  級ならば

$$z_{\dots xy \dots} = z_{\dots yx \dots}$$

が成立する。ただし  $\dots$  部分は同じとし、微分は全部で  $n$  回されるものとする。

(3) \*  $z = f(x, y)$  が  $C^n$  級ならば  $n$  階の導関数は  $x, y$  で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

(1)  $z$  が  $C^3$  級するとき、 $z_x$  および  $z_y$  は  $C^2$  級である。 $z_x$  に系を適用すると

$$z_{xxy} = (z_x)_{xy} = (z_x)_{yx} = z_{xyx}$$

が得られる。 $z_y$  に系を適用すると

$$z_{yxy} = (z_y)_{xy} = (z_y)_{yx} = z_{yyx}$$

$z$  は  $C^3$  級であるから、 $C^2$  級でもある。よって系より  $z_{xy} = z_{yx}$  が成立する。よって

$$z_{xyx} = (z_{xy})_x = (z_{yx})_x = z_{yxx}$$

$$z_{xyy} = (z_{xy})_y = (z_{yx})_y = z_{yxy}$$

となる。

(2) \*  $\alpha, \beta$  を  $x$  と  $y$  からなる列とする。ただし  $\alpha$  は  $k$  個の  $x, y$  から、 $\beta$  は  $n - k - 2$  個の  $x, y$  からできているとする。ただし  $k \leq n - 2$  とする。ここで証明すべきことは

$$z_{\alpha xy \beta} = z_{\alpha yx \beta}$$

である。

$z_\alpha$  は  $z$  を  $k$  回微分したもののなので  $C^{n-k}$  級である。 $n - k \geq 2$  なので系が適用できる。このとき

$$(z_\alpha)_{xy} = (z_\alpha)_{yx}$$

が成立する。よって

$$z_{\alpha xy} = (z_\alpha)_{xy} = (z_\alpha)_{yx} = z_{\alpha yx}$$

が成立する。これより

$$z_{\alpha xy \beta} = (z_{\alpha xy})_\beta = (z_{\alpha yx})_\beta = z_{\alpha yx \beta}$$

の成立が示される。

(3) \*  $\gamma$  を  $x$  と  $y$  からなる列で、 $x$  が  $k$  個、 $y$  が  $n - k$  個からなるとする。 $\omega$  を

$$\omega = \underbrace{x \cdots x}_{k \text{ 個}} \underbrace{y \cdots y}_{n-k \text{ 個}}$$

となる列とするととき

$$z_\gamma = z_\omega$$

を示せばよい。 $\gamma$  が  $\cdots yx \cdots$  という部分列を含まなければ、 $\gamma = \omega$  なので  $z_\gamma = z_\omega$  が成立する。 $\gamma$  が  $\cdots yx \cdots$  という部分列を含んだとする。 $\gamma = \alpha yx\beta$  と表記したとき  $\gamma_1 = \alpha xy\beta$  とおく。このとき (2) の結果より  $z_\gamma = z_{\gamma_1}$  が成立している。 $\gamma_1$  が  $\cdots yx \cdots$  という部分列を含まなければ  $\gamma_1 = \omega$  となっているので、 $z_\gamma = z_{\gamma_1} = z_\omega$  となり、命題は示される。 $\gamma_1$  が  $\cdots yx \cdots$  という部分列を含んだとする。 $\gamma_1 = \alpha_1 yx\beta_1$  と表記したとき  $\gamma_2 = \alpha_1 xy\beta_1$  とおく。このとき (2) の結果より  $z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2}$  が成立している。 $\gamma_2$  が  $\cdots yx \cdots$  という部分列を含まなければ、 $\gamma_2 = \omega$  なので  $z_\gamma = z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2} = z_\omega$  が成立する。このことを続けていくことによりいつかは  $\omega$  になる。即ち列  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$  が存在して  $\gamma_t = \omega$  となるのが分かる。(2) より任意の  $k$  に対し  $z_{\gamma_k} = z_{\gamma_{k+1}}$  が成立するので

$$z_\gamma = z_{\gamma_1} = \cdots = z_{\gamma_t} = z_\omega$$

が成立する。

演習問題 2.28  $F(t) = f(a + ht, b + kt)$  とおき、 $F(t)$  に 1 変数のテーラーの定理を適用することにより定理 2.26 を証明せよ。

$$\begin{aligned} F'(t) &= h \frac{\partial}{\partial x} f(a + ht, b + kt) + k \frac{\partial}{\partial y} f(a + ht, b + kt) \\ &= Df(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

となる。更に  $t$  で微分すると

$$\begin{aligned} F''(t) &= h \frac{\partial}{\partial x} Df(a + ht, b + kt) + k \frac{\partial}{\partial y} Df(a + ht, b + kt) \\ &= D^2 f(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

となる。任意の自然数  $n$  に対し

$$F^{(n)}(t) = D^n f(a + ht, b + kt)$$

となる (厳密には数学的帰納法で証明する)。1 変数のテーラーの定理より

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}$$

を満たす  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) が存在する。これを整理すると定理が得られる。

演習問題 2.29  $n = 4$  のとき定理 2.26 を  $D$  を用いないで記述せよ。また  $n = 5$  のときも記述せよ。

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx}(a, b) + 3h^2 k f_{xxy}(a, b) + 3hk^2 f_{xyy}(a, b) + k^3 f_{yyy}(a, b)) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(h^4 f_{xxxx}(a + \theta h, b + \theta k) + 4h^3 k f_{xxxxy}(a + \theta h, b + \theta k) + 6h^2 k^2 f_{xxyy}(a + \theta h, b + \theta k) \\ &\quad + 4hk^3 f_{xyyy}(a + \theta h, b + \theta k) + k^4 f_{yyyy}(a + \theta h, b + \theta k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a+h, b+k) &= f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)) \\
&+ \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx}(a, b) + 3h^2 k f_{xxy}(a, b) + 3hk^2 f_{xyy}(a, b) + k^3 f_{yyy}(a, b)) \\
&+ \frac{1}{4!}(h^4 f_{xxxx}(a, b) + 4h^3 k f_{xxx}(a, b) + 6h^2 k^2 f_{xxy}(a, b) + 4hk^3 f_{xyy}(a, b) + k^4 f_{yyy}(a, b)) \\
&+ \frac{1}{5!}(h^5 f_{xxxxx}(a+\theta h, b+\theta k) + 5h^4 k f_{xxxxy}(a+\theta h, b+\theta k) + 10h^3 k^2 f_{xxxyy}(a+\theta h, b+\theta k) \\
&+ 10h^2 k^3 f_{xxyyy}(a+\theta h, b+\theta k) + 5hk^4 f_{xyyyy}(a+\theta h, b+\theta k) + k^5 f_{yyyyy}(a+\theta h, b+\theta k))
\end{aligned}$$

演習問題 2.30 次の関数を  $(x, y) = (a, b)$  で近似する 1 次式, 2 次式および 3 次式を求めよ。ただし演習問題 2.31 の結果は用いてもよい。

(1)  $z = f(x, y) = (x-1)(y+2) \quad (a, b) = (0, 0)$

(2)  $z = f(x, y) = \frac{1}{1-2x+3y} \quad (a, b) = (0, 0)$

(3)  $z = f(x, y) = \sin(x+y) \quad (a, b) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(1)  $f_x = y+2, f_y = x-1, f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = 1, f_{xxx} = 0, f_{xxy} = 0, f_{xyy} = 0, f_{yyy} = 0$  なので  $f(0, 0) = -2, f_x(0, 0) = 2, f_y(0, 0) = -1, f_{xx}(0, 0) = 0, f_{xy}(0, 0) = 1, f_{yy}(0, 0) = 0, f_{xxx}(0, 0) = 0, f_{xxy}(0, 0) = 0, f_{xyy}(0, 0) = 0, f_{yyy}(0, 0) = 0$  となる。

$(x, y) = (0, 0)$  で  $f(x, y)$  を近似する 1 次式は

$$f(0+h, 0+k) \doteq -2 + 2h - k$$

であり, 近似する 2 次式は

$$f(0+h, 0+k) \doteq -2 + 2h - k + hk = f(h, k)$$

であり, 近似する 3 次式は

$$f(0+h, 0+k) \doteq -2 + 2h - k + hk = f(h, k)$$

となる。この場合  $f(x, y)$  は 2 次式なので, 近似の式は 2 次の段階で  $f(x, y)$  に一致している。

(2)  $f_x = \frac{2}{(1-2x+3y)^2}, f_y = -\frac{3}{(1-2x+3y)^2}, f_{xx} = \frac{8}{(1-2x+3y)^3}, f_{xy} = -\frac{12}{(1-2x+3y)^3},$

$f_{yy} = \frac{18}{(1-2x+3y)^3}, f_{xxx} = \frac{48}{(1-2x+3y)^4}, f_{xxy} = -\frac{72}{(1-2x+3y)^4}, f_{xyy} = \frac{108}{(1-2x+3y)^4},$

$f_{yyy} = -\frac{162}{(1-2x+3y)^4}$  なので  $f(0, 0) = 1, f_x(0, 0) = 2, f_y(0, 0) = -3, f_{xx}(0, 0) = 8, f_{xy}(0, 0) = -12, f_{yy}(0, 0) = 18, f_{xxx}(0, 0) = 48, f_{xxy}(0, 0) = -72, f_{xyy}(0, 0) = 108, f_{yyy}(0, 0) = -162$  となる。

$(x, y) = (0, 0)$  で  $f(x, y)$  を近似する 1 次式は

$$f(0+h, 0+k) \doteq 1 + 2h - 3k$$

であり, 近似する 2 次式は

$$f(0+h, 0+k) \doteq 1 + 2h - 3k + 4h^2 - 12hk + 9k^2$$

であり, 近似する 3 次式は

$$f(0+h, 0+k) \doteq 1 + 2h - 3k + 4h^2 - 12hk + 9k^2 + 8h^3 - 36h^2k + 54hk^2 - 27k^3$$

となる。

$$(3) \quad f_x = f_y = \cos(x+y), f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = -\sin(x+y), f_{xxx} = -\cos(x+y), f_{xxy} = -\cos(x+y), f_{xyy} = -\cos(x+y), f_{yyy} = -\cos(x+y) \text{ なので } f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1, f_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1, f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, f_{xxx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1, f_{xxy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1, f_{xyy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1, f_{yyy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ となる。}$$

$(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  で  $f(x, y)$  を近似する 1 次式は

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h, \frac{\pi}{2} + k\right) \doteq -h - k$$

であり, 近似する 2 次式は

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h, \frac{\pi}{2} + k\right) \doteq -h - k$$

であり, 近似する 3 次式は

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h, \frac{\pi}{2} + k\right) \doteq -h - k + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{2}h^2k + \frac{1}{2}hk^2 + \frac{1}{6}k^3$$

となる。

### 演習問題 2.31

- (1)  $f(a, b) + Df(a, b)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で  $f(x + h, y + k)$  を近似する 1 次式であることを示せ。  
 (2)  $f(a, b) + Df(a, b) + \frac{1}{2!}D^2f(a, b)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で  $f(x + h, y + k)$  を近似する 2 次式であることを示せ。  
 (3)  $\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}D^j f(a, b)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で  $f(x + h, y + k)$  を近似する  $n$  次式であることを示せ。

(1)  $\varepsilon(h, k) = \frac{f(a + h, b + k) - (f(a, b) + Df(a, b))}{\sqrt{h^2 + k^2}}$  とおくと, テーラーの定理より

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} &= f(a + h, b + k) - (f(a, b) + Df(a, b)) = R_2 = \frac{1}{2!}D^2(a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{2} \left( h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) \right) \end{aligned}$$

となる。  $M_1 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$ ,  $M_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$ ,

$M_3 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$ ,  $M = \max \{ M_1, M_2, M_3 \}$  とおくと

$$\begin{aligned} &\left| h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &\leq M_1 h^2 + 2M_2 |h| |k| + M_3 k^2 \leq M h^2 + 2M |h| |k| + M k^2 \\ &= M (h^2 + 2|h| |k| + k^2) = M (|h| + |k|)^2 \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \frac{1}{2} \frac{M (|h| + |k|)^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

が成立する。  $h = r \cos \theta, k = r \sin \theta$  とおくと,  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  となるとき  $r \rightarrow 0$  となる。

$$\frac{(|h| + |k|)^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{(r|\cos \theta| + r|\sin \theta|)^2}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}} = \frac{r^2 (|\cos \theta| + |\sin \theta|)^2}{r} = r (|\cos \theta| + |\sin \theta|)^2$$

より  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(h, k)| = 0$  が得られる。これより  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立する。

$$(2) \quad \varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - \left( f(a, b) + Df(a, b) + \frac{1}{2!} D^2 f(a, b) \right)}{(\sqrt{h^2 + k^2})^2} \quad \text{とおくと, テーラーの定理}$$

より

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) (\sqrt{h^2 + k^2})^2 &= R_3 = \frac{1}{3!} D^3 (a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 h^{3-j} k^j {}_3C_j \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

となる。  $M_j = \max \left\{ \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ),  $M = \max \{ M_0, M_1, M_2, M_3 \}$  とおくと

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h, k)| (\sqrt{h^2 + k^2})^2 &\leq \frac{1}{3!} D^3 (a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 \left| h^{3-j} k^j {}_3C_j \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 |h^{3-j}| |k^j| {}_3C_j \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &\leq \frac{M}{3!} \sum_{j=0}^3 {}_3C_j |h^{3-j}| |k^j| = \frac{M}{3!} (|h| + |k|)^3 \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \frac{M}{3!} \frac{(|h| + |k|)^3}{h^2 + k^2}$$

が成立し,  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(h, k)| = 0$  が得られる。これより  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立する。

$$(3) \quad \varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - \left( \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} D^j f(a, b) \right)}{(\sqrt{h^2 + k^2})^n} \quad \text{とおくと, テーラーの定理より}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) (\sqrt{h^2 + k^2})^n &= R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} (a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} h^{n+1-j} k^j {}_{n+1}C_j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \end{aligned}$$

となる。  $M_j = \max \left\{ \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$  ( $j = 0, 1, \dots, n+1$ ),  
 $M = \max \{ M_j \mid j = 0, 1, \dots, n+1 \}$  とおくと

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h, k)| \left( \sqrt{h^2 + k^2} \right)^n &\leq \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} (a + \theta h, b + \theta k) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \left| h^{n+1-j} k^j {}_{n+1}C_j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} |h^{n+1-j}| |k^j| {}_{n+1}C_j \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j} (a + \theta h, b + \theta k) \right| \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} {}_{n+1}C_j |h^{n+1-j}| |k^j| = \frac{M}{(n+1)!} (|h| + |k|)^{n+1} \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \frac{(|h| + |k|)^{n+1}}{(\sqrt{h^2 + k^2})^n}$$

が成立し,  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(h, k)| = 0$  が得られる。これより  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立する。