解析学 I 問題解説 ♯8

河野

演習問題 2.32　命題 2.27 を示せ。

(a,b) が f の広義の極大点とする。ある $\delta > 0$ が存在して $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ ならば $f(a,b) \geq f(x,y)$ が成立しているので，絶対値が十分小さい (0 に近い) h, k に対し

$$f(a+h,b) \leq f(a,b), \qquad f(a,b+k) \leq f(a,b)$$

が成立している。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$ が成立しているので，

$$f_x^+(a,b) = \lim_{h\to+0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$$

$h < 0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$ が成立しているので，

$$f_x^-(a,b) = \lim_{h\to-0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$$

よって

$$0 \leq f_x^-(a,b) = f_x(a,b) = f_x^+(a,b) \leq 0$$

より $f_x(a,b) = 0$ となる。

$k > 0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leq 0$ が成立しているので，

$$f_y^+(a,b) = \lim_{k\to+0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leq 0$$

$k < 0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geq 0$ が成立しているので，

$$f_y^-(a,b) = \lim_{k\to-0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geq 0$$

よって

$$0 \leq f_y^-(a,b) = f_y(a,b) = f_y^+(a,b) \leq 0$$

より $f_y(a,b) = 0$ となる。(a,b) は f の臨界点である。

次に (広義の) 極小の場合を考える。(a,b) が f の広義の極小点とする。絶対値が十分小さい (0 に近い) h と k に対して，$f(a,b) \leq f(a+h,b+k)$ が成立している。$h > 0$ のとき

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$$

より

$$f_x^+(a,b) = \lim_{h\to+0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geq 0$$

が成立する。また $h<0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$ より

$$f_x^-(a,b) = \lim_{h\to -0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leq 0$$

が成立する。よって

$$0 \leq f_x^+(a,b) = f_x(a,b) = f_x^-(a,b) \leq 0$$

より $f_x(a,b)=0$ である。

$k>0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geq 0$ より

$$f_y^+(a,b) = \lim_{k\to +0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geq 0$$

が成立する。また $k<0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leq 0$ より

$$f_y^-(a,b) = \lim_{k\to -0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leq 0$$

が成立する。よって

$$0 \leq f_y^+(a,b) = f_y(a,b) = f_y^-(a,b) \leq 0$$

より $f_y(a,b)=0$ である。(a,b) は f の臨界点である。

演習問題 2.33　2 次関数 $z=f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$，$(a,b)=(0,0)$ に対して定理 2.29 が成立することを示せ。(ヒント：$y\neq 0$ のとき関数を y^2 で割って，$t=\dfrac{x}{y}$ とおくと，2 次方程式の判別式が使える。)

$$z_x = 2Ax+2By, \quad z_y = 2Bx+2Cy, \quad z_{xx}=2A, \quad z_{xy}=2B, \quad z_{yy}=2C$$

$(x,y)=(0,0)$ は臨界点であり，$f(0,0)=0$ である。ヘッシアンは

$$H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4\left(AC-B^2\right)$$

となる。最初に $H>0$ かつ $A>0$ の場合を考える。$y=0$ のとき $f(x,0)=Ax^2$ となるので，$x\neq 0$ のとき $f(x,0)=Ax^2>0=f(0,0)$ となっている。$y\neq 0$ のとき $\dfrac{1}{y^2}f(x,y) = A\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 2B\left(\dfrac{x}{y}\right)+C$ である。$g(t)=At^2+2Bt+C$ とおくと，H は 2 次方程式 $g(t)=0$ の判別式の符号を逆にしたものなので，$H>0$ かつ $A>0$ より，任意の t に対し $g(t)>0$ が成立する。よって $\dfrac{1}{y^2}f(x,y)>0$ となり，$f(x,y)>0$ が得られる。以上により $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)>f(0,0)$ なので $(0,0)$ で極小値をとる。

次に $H>0$ かつ $A<0$ のときを考える。$y=0$ のとき $f(x,0)=Ax^2$ となるので，$x\neq 0$ のとき $f(x,0)=Ax^2<0=f(0,0)$ となっている。$y\neq 0$ のとき $\dfrac{1}{y^2}f(x,y) = A\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 2B\left(\dfrac{x}{y}\right)+C$

である。$g(t)=At^2+2Bt+C$ とおくと，H は 2 次方程式 $g(t)=0$ の判別式の符号を逆にしたものなので，$H>0$ かつ $A<0$ より，任意の t に対し $g(t)<0$ が成立する。よって $\dfrac{1}{y^2}f(x,y)<0$ となり，$f(x,y)<0$ が得られる。以上により $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)<f(0,0)$ なので $(0,0)$ で極大値をとる。

$A=0$ のときは $H=-B^2$ なので $H>0$ となることはない。よって $H>0$ の場合は示された。

次に $H<0$ のときを考える。$y\neq 0$ として $t=\dfrac{x}{y}$ に対し $g(t)=At^2+Bt+C$ を考える。$H<0$ なのでこのグラフは x 軸と交わる。よって $g(t)$ は正の値も負の値もとる。即ち $\exists t_1\ g(t_1)>0$ かつ $\exists t_2\ g(t_2)<0$ が成立する。このとき $t_1=\dfrac{x_1}{y_1}$ となる (x_1,y_1) に対して $f(x_1,y_1)=\dfrac{1}{y_1^2}g(t_1)>0$ となるので，$f(x_1,y_1)>0$ となる。y_1 を充分小さくとると (x_1,y_1) は原点に充分近い。$t_2=\dfrac{x_2}{y_2}$ となる (x_2,y_2) に対して $f(x_2,y_2)=\dfrac{1}{{y_2}^2}g(t_2)<0$ となるので，$f(x_2,y_2)<0$ となる。y_2 を充分小さくとると (x_2,y_2) は原点に充分近い。$(0,0)$ にいくらでも近いところに $f(x_1,y_1)>0$ となる点 (x_1,y_1) と $f(x_2,y_2)<0$ となる点 (x_2,y_2) が存在するので $(0,0)$ は極値ではない。

演習問題 ***2.34**　定理 2.29 を証明せよ。

式が長くなるので $f_{xy}(a,b)$ 等を f_{xy}，$f_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)$ 等を $f_{xy}(\theta)$ と略記する。テーラーの定理より

$$R_3=\frac{1}{3!}\left(h^3f_{xxx}(\theta)+3h^2kf_{xxy}(\theta)+3hk^2f_{xyy}(\theta)+k^3f_{yyy}(\theta)\right)$$

とおくと

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+hf_x+kf_x+\frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\right)+R_3$$

となる θ $(0<\theta<1)$ が存在する。$F_2=\dfrac{1}{2}\left(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\right)$ とおくと，$f_x(a,b)=0, f_y(a.b)=0$ より

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=F_2+R_3$$

となる。

$H(a,b)>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$ の場合を考える。F_2 は h,k に関する 2 次式なので，演習問題 2.33 より原点の近くで $F_2>0$ となっている。$F_2+R_3>0$ が示されれば極小であることが分かる。

(h,k) に対し $r=\sqrt{h^2+k^2}$ とし，

$$h=ru,\quad k=rv$$

とおくと (u,v) は半径 1 の円周上の点である。

$$F_2=r^2\frac{1}{2}\left(u^2f_{xx}+2uvf_{xy}+v^2f_{yy}\right)$$
$$R_3=r^3\frac{1}{6}\left(u^3f_{xxx}(\theta)+3u^2vf_{xxy}(\theta)+3uv^2f_{xyy}(\theta)+v^3f_{yyy}(\theta)\right)$$

より

$$G_2(u,v)=\frac{1}{2}\left(u^2f_{xx}+2uvf_{xy}+v^2f_{yy}\right)$$
$$G_3(u,v)=\frac{1}{6}\left(u^3f_{xxx}(\theta)+3u^2vf_{xxy}(\theta)+3uv^2f_{xyy}(\theta)+v^3f_{yyy}(\theta)\right)$$

とおく。

G_2 は r が変化しても変化しないが，r が変化すると θ が変化するので，r が変化すると G_3 が変化することを注意しておく。

(u,v) は半径 1 の円周上を動く。円周は有界閉集合なので，最大値定理より $G_2(u,v)$ は最小値 M_2 をとる。このとき任意の (u,v) に対し $G_2 \geq M_2$ が成立する。G_2 も 2 次式で F_2 と同じ条件を満たすので $G_2 > 0$ であり，$M_2 > 0$ である。充分小さな $\delta > 0$ に対し

$$N = \max\{\,|f_{xxx}(a,y)|, |f_{xxy}(x,y)|, |f_{xyy}(x,y)|, |f_{yyy}(x,y)| \mid d\left((x,y),(a,b)\right) \leq \delta\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}|G_3| &\leq \frac{1}{6}\left(|u|^3N + 3|u|^2|v|N + 3|u||v|^2N + |v|^3N\right)\\ &= \frac{N}{6}(|u|+|v|)^3\end{aligned}$$

となるが $\dfrac{N}{6}(|u|+|v|)^3$ も連続関数なので最大値 M_3 が存在する。r を $M_3r < M_2$ が成立するように十分小さくとると，

$$\begin{aligned}F_2 + R_3 &= r^2G_2 + r^3G_3 \geq r^2G_2 - r^3|G_3|\\ &\geq r^2M_2 - r^3M_3 = r^2(M_2 - rM_3) > 0\end{aligned}$$

次に $H(a,b) > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) < 0$ のときを考える。F_2 は h,k に関する 2 次式なので，演習問題 2.33 より原点の近くで $F_2 < 0$ となっている。$F_2 + R_3 < 0$ が示されれば極大であることが分かる。

$r, u, v, G_2, G_3, N, M_3$ を先程と同じものとする。最大値定理より $G_2(u,v)$ は最大値 N_2 をとる。このとき任意の (u,v) に対し $G_2 \leq N_2$ が成立する。G_2 も 2 次式で F_2 と同じ条件を満たすので $G_2 < 0$ であり，$N_2 < 0$ である。r を $M_3r < -N_2$ が成立するように十分小さくとると，

$$\begin{aligned}F_2 + R_3 &= r^2G_2 + r^3G_3 \leq r^2G_2 + r^3|G_3|\\ &\leq r^2N_2 + r^3M_3 = r^2(N_2 - rM_3) < 0\end{aligned}$$

最後に $H(a,b) < 0$ の場合を考える。演習問題 2.33 より半径 1 の円周上の点 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ で $G_2(u_1,v_1) > 0, G_2(u_2,v_2) < 0$ となる点が存在する。r を十分小さくとって

$$rM_3 < G_2(u_1,v_1), \qquad rM_3 < -G_2(u_2,v_2)$$

の両方が成立するようにしておく。このとき $(x_1,y_1) = (ru_1, rv_1), (x_2,y_2) = (ru_2, rv_2)$ とおくと

$$\begin{aligned}F_2(x_1,y_1) + R_3(x_1,y_1) &\geq r^2G(u_1,v_1) - r^3M_3 \geq r^2(G(u_1,v_1) - rM_3) > 0\\ F_2(x_2,y_2) + R_3(x_2,y_2) &\leq r^2G(u_2,v_2) +^3 M_3 \leq r^2(G(u_2,v_2) + rM_3) < 0\end{aligned}$$

となるので $(a.b)$ は極点ではない。

演習問題 2.35　次の関数の極点を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$　(2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = (x+y)^2 + x^4 + y^4$　(4) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

(5) $z=(y-x^2)^2+x^5$

(6) $z=x^3+2xy^2-3x^2-3y^2-1$

(7) $z=x^3-3xy+y^3$

(8) $z=xy(x^2+y^2-1)$

(9) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

(10) $z=\dfrac{ax+by}{x^2+y^2+1}$ $(a\neq 0, b\neq 0)$

(11) $z=e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ $(a>b>0)$

(1)　(a) 最初に臨界点 ($z_x=0$ かつ $z_y=0$ となる点) を求める。$z_x=2x-y-2, z_y=-x+2y+3$ なので連立方程式 $z_x=0, z_y=0$ を解くと $x=\dfrac{1}{3}, y=-\dfrac{4}{3}$ が得られる。(b) 次にヘッシアンを計算する。$z_{xx}=2, z_{yy}=2, z_{xy}=-1$ なので $H(x,y)=2^2-(-1)^2=3>0$ である。よって z は $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$ は極点である。なお $z_{xx}>0$ なので極小値 $-\dfrac{4}{3}$ をとる。

(2)　前問と同様に計算すると $\left(-\dfrac{1}{17},\dfrac{3}{17}\right)$ が臨界点であるが，$H(x,y)=-17<0$ となっている。臨界点が極値を与えないので極点は存在しない。

(3)　$z_x=2(x+y)+4x^3, z_y=2(x+y)+4y^3$ なので，$2(x+y)+4x^3=0$ (1 式) から $2(x+y)+4y^3=0$ (2 式) を引くと $x^3-y^3=0$ (3 式) が得られる。

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

より $x-y=0$ または $x^2+xy+y^2=0$ である。$x-y=0$ のときこの式を (1 式) [(2 式でも同様)] に代入すると

$$0=2(x+x)+4x^3=4x(x^2+1)=0$$

となる。x は実数なので $x^2+1>0$ より $x=0$，よって $(x,y)=(0,0)$ となる。$x^2+xy+y^2=0$ のとき，

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}=0$$

となる。x,y は実数なので $y^2\geq 0, \left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2\geq 0$ となり $x+\dfrac{y}{2}=0$ かつ $y=0$ より $(x,y)=(0,0)$ となる。以上により臨界点は $(0,0)$ である。

$$z_{xx}=2+12x^2, \qquad z_{xy}=2, \qquad z_{yy}=2+12y^2$$

より $H(0,0)=0$ なのでヘッシャンだけでは極点かどうか分からない。

$(x+y)^2\geq 0, x^4\geq 0, y^4\geq 0$ であり，$(x,y)\neq(0,0)$ のとき

$$z=(x+y)^2+x^4+y^4>0$$

である。$z(0,0)=0$ なので $(0,0)$ は極点 (極小点) である。

(4)　$z_x=6x^2+y^2+10x, z_y=2xy+2y$ より $6x^2+y^2+10x=0$ (1 式) および $2xy+2y=2y(x+1)=0$ (2 式) が成立している。(2 式) より $y=0$ または $x=-1$ である。$y=0$ のとき，これを (1 式) に代入すると

$$2x(3x+5)=0$$

より $x=0,-\dfrac{5}{3}$ を得る。

$x=-1$ のとき，これを (1 式) に代入すると y^2-4=0 より $y=\pm 2$ を得る。よって臨界点は $(x,y)=(0,0), \left(-\frac{5}{3},0\right), (-1,2), (-1,-2)$ である。

$$z_{xx}=12x+10, \qquad z_{xy}=2y, \qquad z_{yy}=2x+2$$

より

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 6x+5 & y \\ y & x+1 \end{vmatrix} = 4\Big((6x+5)(x+1)-y^2\Big)$$

$$H(0,0)=20>0, \quad H\left(-\frac{5}{3},0\right)=\frac{40}{3}>0, \quad H(-1,2)=-16<0, \quad H(-1,-2)=-16<0$$

極点は $(x,y)=(0,0), \left(-\frac{5}{3},0\right)$ である。なお $(0,0)$ では極小，$\left(-\frac{5}{3},0\right)$ では極大である。

(5)　$z_x=-2(y-x^2)2x+5x^4, z_y=2(y-x^2)$ なので $-4x(y-x^2)+5x^4=0$ (1 式) および $2(y-x^2)=0$ (2 式) が成立している。(2 式) より $y=x^2$ となるので，これを (1 式) に代入すると $5x^4=0$，よって $x=0$ を得る。$y=x^2$ より $y=0$，よって臨界点は $(x,y)=(0,0)$ である。

$H(0,0)=0$ なのでヘッシャンだけでは判定できない。$z(0,0)=0$ であり，$y=x^2$ 上では $z=x^5$ となるので，$(0,0)$ の近くに $z(x,y)>0$ になる点 (x,y) と $z(x,y)<0$ になる点 (x,y) が存在する。よって $(0,0)$ は極点ではない。以上により極点は存在しない。

(6)　最初に臨界点を求める。

$$z_x=3x^2+2y^2-6x, \quad z_y=4xy-6y$$

なので $z_y=0$ より $y(2x-3)=0$ となるので，$y=0$ または $2x-3=0$ となる。$y=0$ のとき

$$z_x(x,0)=3x^2+2\cdot 0^2-6x=3x^2-6x=0$$

を得る。よって $y=0$ のときは $x=0$ または $x=2$ である。

$x=\frac{3}{2}$ のとき

$$z_x\left(\frac{3}{2},y\right)=3\left(\frac{3}{2}\right)^2+2y^2-6\cdot\frac{3}{2}=0$$

を得る。よって $y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ である。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0), \quad (2,0), \quad \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

である。

$$z_{xx}=6x-6, \quad z_{xy}=4y, \quad z_{yy}=4x-6$$

なので

$$H(x,y)=12(x-1)(2x-3)-16y^2$$

となる。よって

$$H(0,0)=36>0, H(2,0)=12>0, H\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-18<0, H\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-18<0$$

となる。よって極点 (x,y) は $(0,0)$ と $(2,0)$ である。なお $z_{xx}(0,0)=-6<0$，$z_{xx}(2,0)=6>0$ なので $(0,0)$ では極大，$(2,0)$ では極小である。

(7)　最初に臨界点を求める。

$$z_x=3x^2-3y, \quad z_y=-3x+3y^2$$

なので $z_x=0$ から $z_y=0$ を引くことにより

$$\begin{aligned} 0&=x^2-y^2-y+x=(x^2-y^2)+(x-y)\\ &=(x-y)(x+y)+(x-y)\\ &=(x-y)(x+y+1) \end{aligned}$$

を得る。よって $x=y$ または $x+y=-1$ が成立する。

　最初に $x+y=-1$ が成立している場合を考える。$y=-1-x$ を $x=y^2$ に代入すると，$x=(1+x)^2$ より $x^2+x+1=0$ を得る。この 2 次方程式は実数解を持たないので，この場合は解はない。よって $x=y$ が成立する。これをもとの方程式に代入すると $x=0,1$ が得られる。よって臨界点は

$$(x,y)=(0,0), \quad (1,1)$$

である。

$$z_{xx}=6x, \quad z_{xy}=-3, \quad z_{yy}=6y$$

なので

$$H(x,y)=36xy-9$$

となる。よって

$$H(0,0)=-9<0, \quad H(1,1)=27>0$$

となる。よって極点 (x,y) は $(x,y)=(1,1)$ である。なお $z_{xx}(1,1)=6>0$ なので $(1,1)$ で極小である。

(8)　最初に臨界点を求める。

$$z_x=y(x^2+y^2-1)+2x^2y, \quad z_y=x(x^2+y^2-1)+2xy^2$$

なので $z_x=0$ から $z_y=0$ を引くことにより

$$\begin{aligned} 0&=(y-x)(x^2+y^2-1)+2xy(x-y)=(y-x)(x^2+y^2-1)-2xy(y-x)\\ &=(y-x)(x^2+y^2-1-2xy)=(y-x)\big((x-y)^2-1\big)\\ &=(y-x)(x-y-1)(x-y+1) \end{aligned}$$

を得る。よって $x=y$ または $x-y-1=0$ または $x-y+1=0$ が成立する。

最初に $x=y$ が成立している場合を考える。

$$\begin{aligned}0=z_x(x,x)&=x(x^2+x^2-1)+2x^3=x(4x^2-1)\\&=x(2x-1)(2x+1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\pm\dfrac{1}{2}$ となる。よってこの場合

$$(x,y)=(0,0),\quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

である。

次に $x-y-1=0$ の場合を考える。$y=x-1$ なので

$$\begin{aligned}0=z_y(x,x-1)=&x\big(x^2+(x-1)^2-1\big)+2x(x-1)^2=x\big(x^2+(x-1)^2-1+2(x-1)^2\big)\\=&x(4x^2-6x+2)=2x(2x^2-3x+1)\\=&2x(2x-1)(x-1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\dfrac{1}{2}$ または $x=1$ となる。今の場合 $y=x-1$ なので

$$(x,y)=(0,-1),\quad \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad (1,0)$$

である。

最後に $x-y+1=0$ の場合を考える。$y=x+1$ なので

$$\begin{aligned}0=z_y(x,x+1)&=x\big(x^2+(x+1)^2-1\big)+2x(x+1)^2=x\big(x^2+(x+1)^2-1+2(x+1)^2\big)\\&=x(4x^2+6x+2)=2x(2x^2+3x+1)\\&2x(2x+1)(x+1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=-\dfrac{1}{2}$ または $x=-1$ となる。今の場合 $y=x+1$ なので

$$(x,y)=(0,1),\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad (-1,0)$$

である。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0),\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$$

である。

$$z_{xx}=6xy,\quad z_{xy}=3x^2+3y^2-1,\quad z_{yy}=6xy$$

なので

$$H(x,y)=36x^2y^2-(3x^2+3y^2-1)^2$$

となる。よって

$$H(0,0)=-1<0, H(0,\pm 1)=-4<0, H(\pm 1,0)=-4<0, H\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0, H\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0$$

となる。よって極点は $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$ である。なお

$$z_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=z_{xx}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)>0,\quad z_{xx}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=z_{xx}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)<0$$

なので $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ で極小であり，$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ で極大である。

(9)　最初に臨界点を求める。

$$z_x=4x^3-4x+4y,\quad z_y=4y^3+4x-4y$$

なので $z_x=0$ と $z_y=0$ を加えて 4 で割ると

$$0=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

を得る。よって $x+y=0$ または $x^2-xy+y^2=0$ が成立する。
　最初に $x^2-xy+y^2=0$ が成立している場合を考える。

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0$$

より $x=0,y=0$ を得る。これは $z_x(0,0)=0,z_y(0,0)=0$ を満たしている。
　次に $x+y=0$ の場合を考える。$y=-x$ を代入すると

$$\begin{aligned}0=z_x(x,-x)&=4x^3-4x-4x=4(x^3-2x)\\&=4x(x^2-2)=4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\sqrt{2}$ または $x=-\sqrt{2}$ となる。今の場合

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

となる。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

である。

$$z_{xx}=12x^2-4,\quad z_{xy}=4,\quad z_{yy}=12y^2-4$$

なので

$$H(x,y)=16(3x^2-1)(3y^2-1)-16$$

となる。よって

$$H(0,0)=0,\quad H(\sqrt{2},-\sqrt{2})=H(-\sqrt{2},\sqrt{2})=384>0$$

となる。$z_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=z_{xx}(-\sqrt{2},\sqrt{2})>0$ なので $(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ で極小である。

$(x,y)=(0,0)$ はこれだけではよく分からない。最初に $y=x$ 上での z の動きを見よう。$g(x)=z(x,x)$ とおくと

$$g(x)=2x^4$$

となるので $x=0$ で極小である。よって $(0,0)$ の十分近くの点 (x,y) で (今の場合 $y=x$ を満たしている)，$z(x,y)>z(0,0)$ となる点がある。

次に $y=-x$ 上での z の動きを見よう。$h(x)=z(x,-x)$ とおくと

$$h(x)=2x^4-8x^2$$

となる。$h(x)$ の増減表を書いて $x=0$ のまわりの状況を調べると，$y=-x$ 上では極大になっている。よって $(0,0)$ の十分近くの点 (x,y) で (今の場合 $y=-x$ を満たしている)，$z(x,y)<z(0,0)$ となる点がある。十分近くに $z(0,0)$ より大きい点も小さい点もあるので，z は $(0,0)$ で極値をとらない。

以上により極点は $(x,y)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ および $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ である。

(10) $z_x=\dfrac{a}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2(ax+by)x}{(x^2+y^2+1)^2}$, $z_y=\dfrac{b}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2(ax+by)y}{(x^2+y^2+1)^2}$ なので臨界点は連立方程式 $z_x=0, z_y=0$ の解である。$z_x=0$ より $x=\dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}a$ となる。また $z_y=0$ より $y=\dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}b$ となる。$k=\dfrac{x^2+y^2+1}{2(ax+by)}$ とおくと $x=ka, y=kb$ となる。これを $z_x(x^2+y^2+1)^2=a(x^2+y^2+1)-2(ax+by)x=0$ に代入して

$$a((a^2+b^2)k^2+1)-2(a^2+b^2)ak^2=0$$

を得る。これを解くと $k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となるので，臨界点は

$$(x,y)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

である。

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{2(ax^3-3y^2ax-3ax+3byx^2-by^3-by)}{(x^2+y^2+1)^3} & \dfrac{2(3ayx^2-ay^3-ay-bx^3+3bxy^2-bx)}{(x^2+y^2+1)^3} \\ \dfrac{2(3ayx^2-ay^3-ay-bx^3+3bxy^2-bx)}{(x^2+y^2+1)^3} & -\dfrac{2(3byx^2-by^3+3by-3y^2ax+ax^3+ax)}{(x^2+y^2+1)^3} \end{vmatrix}$$

となる。$k=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(\varepsilon=\pm1)$ とおくと

$$H\left(\frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\begin{vmatrix} -\varepsilon\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} & 0 \\ 0 & -\varepsilon\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{vmatrix}=\frac{a^2+b^2}{4}>0$$

である。よって極点は

$$(x,y)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

である。なお $z_{xx}\left(\dfrac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\varepsilon\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ より $(x,y) = \left(-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ は極小値を，$(x,y) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ は極大値を与える。極値は

$$z\left(\frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{\varepsilon b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

である。

(11) $z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2e^{-(x^2+y^2)}ax, z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2e^{-(x^2+y^2)}by$ となっている。連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解く。$e^{-(x^2+y^2)} \neq 0$ なので

$$z_x = 0 \iff x = 0 \vee a-(ax^2+by^2) = 0, \qquad z_y = 0 \iff y = 0 \vee b-(ax^2+by^2) = 0$$

となっている。場合分けを実行する。(a) $x = 0$，(b) $a-(ax^2+by^2) = 0$，(c) $y = 0$，(d) $b-(ax^2+by^2) = 0$，とすると，

$$\Big((\mathrm{a}) \vee (\mathrm{b})\Big) \wedge \Big((\mathrm{c}) \vee (\mathrm{d})\Big) = \Big((\mathrm{a}) \wedge (\mathrm{c})\Big) \vee \Big((\mathrm{a}) \wedge (\mathrm{d})\Big) \vee \Big((\mathrm{b}) \wedge (\mathrm{c})\Big) \vee \Big((\mathrm{b}) \wedge (\mathrm{d})\Big)$$

となる。

[1] (a) $\wedge$ (c) のとき：この場合は $x = 0$ かつ $y = 0$ なので解は $(x,y) = (0,0)$ である。

[2] (a) $\wedge$ (d) のとき：$x = 0$ を $b-(ax^2+by^2) = 0$ に代入すると，$b(1-y^2) = 0$ となる。$b \neq 0$ より $1-y^2 = 0$，よって $y = \pm 1$ となる。この場合解は $(x,y) = (0,\pm 1)$ である。

[3] (b) $\wedge$ (c) のとき：$y = 0$ を $a-(ax^2+by^2) = 0$ に代入すると，$a(1-x^2) = 0$ となる。$a \neq 0$ より $1-x^2 = 0$，よって $x = \pm 1$ となる。この場合解は $(x,y) = (\pm 1,0)$ である。

[4] (b) $\wedge$ (d) のとき：$a = ax^2+by^2 = b$ となるので $a = b$ となり，$a > b$ に矛盾する。よってこの場合解はない。

以上により臨界点は

$$(x,y) = (0,0),(0,\pm 1),(\pm 1,0)$$

となる。

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2-by^2+2x^4a+2x^2by^2+a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2-5by^2+2y^2ax^2+2y^4b+b) \end{vmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} H(0,0) &= \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0 \\ H(0,1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \\ H(0,-1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H(1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0 \\
H(-1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0
\end{aligned}
$$

となる。よって極点は $(0,0),(\pm 1,0)$ である。なお z は $(x,y)=(0,0)$ で極小値 $z(0,0)=0$，$(x,y)=(\pm 1,0)$ で極大値 $z(\pm 1,0)=\dfrac{a}{e}$ をとる。

演習問題 2.36　命題 2.33 を証明せよ。

領域の点は境界上にあるか内部にあるかのいずれかである。内部にあるときは広義の極大値になっている。そのとき命題 2.27 より臨界点である。

演習問題 2.37

(1) $x+y+z=a\ (a>0)$ のとき $\left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0 \right\}$ における x^3y^3z の最大値を求めよ。

(2) $D=\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leq 1 \right\}$ における $z=f(x,y)=(1-x^2-y^2)x^2y$ の最大値を求めよ。

(3) $f(x,y)=(x+1)^2+(y+1)^2$，$D=\{ (x,y) \mid -2\leq x\leq 2, -2\leq y\leq 2 \}$ とする。D における $f(x,y)$ の最大値を求めよ。

(4) $D=\{ (x,y) \mid -1\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 1 \}$ における $f(x,y)=x^2-y^2$ の最大値を求めよ。

(5) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。

(6) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

(7) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最小のものを求めよ。

(1)　$z=a-x-y$ と考え，$f(x,y)=x^3y^3z=x^3y^3(a-x-y)$ の最大値を求める。
$\left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0 \right\}$ の条件

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$$

を x,y についての条件に書き直すと

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq a$$

となる。よって $D=\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq a \right\}$ 上で $f(x,y)=x^3y^3(a-x-y)$ の最大値を求めればよい。

D は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は連続なので，D 上で $f(x,y)$ は最大値をとる。その点は境界上にあるか，内部の臨界点である。境界上では $f(x,y)=0$ となる。内部の臨界点を調べる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^3(a-x-y)-x^3y^3 = x^2y^3(3a-4x-3y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^3y^2(a-x-y)-x^3y^3 = x^3y^2(3a-3x-4y)
\end{aligned}
$$

$x=0$，$y=0$ は境界なので，内部で $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ を満たすのは $x=\dfrac{3a}{7}, y=\dfrac{3a}{7}$ である。

$$f\left(\frac{3a}{7},\frac{3a}{7}\right)=\frac{3^6a^7}{7^7}$$

なので最大値は $\dfrac{3^6a^7}{7^7}$ である。

(2)　D は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は連続なので最大値が存在する。その点は境界上にあるか，内部の臨界点である。

境界上では $1-x^2-y^2=0$ なので $f(x,y)=0$ である。

次に内部の臨界点を求める。

$$z_x=2xy(1-2x^2-y^2), \qquad z_y=x^2(1-x^2-3y^2)$$

なので連立方程式

$$xy(1-2x^2-y^2)=0, \qquad x^2(1-x^2-3y^2)=0 \tag{3}$$

の解を求める。

$x=0$ は連立方程式 (3) の解になっている。このとき $f(0,y)=0$ である。

よって $x\neq 0$ とする。このとき連立方程式 (3) は次の連立方程式と同値である。

$$y(1-2x^2-y^2)=0, \qquad 1-x^2-3y^2=0 \tag{4}$$

$y=0$ の場合を考える。$y=0$ のとき $x=\pm 1$ なので，境界上の点である。よって $y\neq 0$ とする。このとき連立方程式 (4) は次の連立方程式と同値である。

$$1-2x^2-y^2=0, \qquad 1-x^2-3y^2=0 \tag{5}$$

これをとくと $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{4}{25\sqrt{5}} \qquad f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{4}{25\sqrt{5}}$$

これらの中で最も大きいのは $f\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{4}{25\sqrt{5}}$ である。よって最大値は $\dfrac{4}{25\sqrt{5}}$ である。

(3)　D は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は連続なので最大値が存在する。その点は境界上にあるか，内部の臨界点である。

臨界点を求める。$f_x=2(x+1), f_y=2(y+1)$ なので臨界点は $(x,y)=(-1,-1)$ である。臨界点での値は

$$f(-1,-1)=0$$

である。

$L_1 = \{\,(x,2)\,|\,-2 \leq x \leq 2\,\}$，$L_2 = \{\,(x,-2)\,|\,-2 \leq x \leq 2\,\}$，$L_3 = \{\,(2,y)\,|\,-2 \leq y \leq 2\,\}$，$L_4 = \{\,(-2,y)\,|\,-2 \leq y \leq 2\,\}$ とおくと

$$\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$$

である。

L_1 では $y=2$ なので $f(x,y) = f(x,2) = (x+1)^2 + 3^2$ である。$-2 \leq x \leq 2$ より L_1 上では $x=2$ のとき最大であり，$f(2,2) = 18$ である。

L_2 では $y=-2$ なので $f(x,y) = f(x,-2) = (x+1)^2 + 1^2$ である。$-2 \leq x \leq 2$ より L_2 上では $x=2$ のとき最大であり，$f(2,-2) = 10$ である。

L_3 では $x=2$ なので $f(x,y) = f(2,y) = 3^2 + (y+1)^2$ である。$-2 \leq y \leq 2$ より L_3 上では $y=2$ のとき最大であり，$f(2,2) = 18$ である。

L_4 では $x=-2$ なので $f(x,y) = f(-2,y) = 1^2 + (y+1)^2$ である。$-2 \leq y \leq 2$ より L_4 上では $y=2$ のとき最大であり，$f(-2,2) = 10$ である。

以上により境界上では $(x,y) = (2,2)$ のとき最大値 $f(2,2) = 18$ をとる。

よって最大値は $f(2,2) = 18$ である。

(4)　D は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は連続なので最大値が存在する。その点は境界上にあるか，内部の臨界点である。

$$\partial D = \{\,(-1,y)\,|\,-1 \leq y \leq 1\}\cup\{\,(1,y)\,|\,-1 \leq y \leq 1\}\cup\{\,(x,-1)\,|\,-1 \leq x \leq 1\}\cup\{\,(x,1)\,|\,-1 \leq x \leq 1\,\}$$

である。

$$f(-1,y) = 1 - y^2$$

なので $\{\,(-1,y)\,|\,-1 \leq y \leq 1\,\}$ での最大値は $y=0$ のときで，$f(-1,0) = 1$ である。

$$f(1,y) = 1 - y^2$$

なので $\{\,(1,y)\,|\,-1 \leq y \leq 1\,\}$ での最大値は $y=0$ のときで，$f(1,0) = 1$ である。

$$f(x,-1) = x^2 - (-1)^2 = x^2 - 1$$

なので $\{\,(x,-1)\,|\,-1 \leq x \leq 1\,\}$ での最大値は $x = \pm 1$ のときで，$f(\pm 1,-1) = 0$ である。

$$f(x,1) = x^2 - 1$$

なので $\{\,(x,1)\,|\,-1 \leq x \leq 1\,\}$ での最大値は $x = \pm 1$ のときで，$f(\pm 1,1) = 0$ である。以上により境界上での最大値は $(\pm 1,0)$ のときであり，最大値は $f(\pm 1,0) = 1$ である。

臨界点を求める。$f_x = 2x, f_y = -2y$ なので臨界点は $(x,y) = (0,0)$ であり，臨界点での値は

$$f(0,0) = 0$$

である。

よって最大値は 1 であり，最大値をとるのは $(x,y) = (\pm 1,0)$ のときである。

(5)　このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを a,b,c とする。$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとき，3 角形の面積 S は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

3 角形の各辺の長さを x, y, z とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを $2s$ とおく，即ち $x+y+z = 2s$ $(s > 0)$ が成立している。x, y, z は辺の長さであるから $x > 0, y > 0, z > 0$ を満たしている。x, y, z が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式，即ち $x + y > z, y + z > x, z + x > y$ が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき，3 辺の長さが x, y, z であるような 3 角形が存在する。z を消去して x, y の不等式から $x < s, y < s, x + y > s$ が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす x, y は最初の 6 つの不等式を満たす。

$\overline{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \leq s, y \leq s, x + y \geq s \right\}$ とおく。ここで S が最大のとき S^2 が最大であり，逆も成立する。よって S^2 が最大になる場合を求めればよい。

$$f(x, y) = S^2 = s(s - x)(s - y)(x + y - s)$$

とおき，$\overline{D}$ 上で $f(x, y)$ の最大値を求める。$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x, y)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は $f(x, y) = 0$ となる。よって内部で最大値をとる。この点は臨界点なので臨界点を求める。

$$f_x = s(s - x)(s - y) - s(s - y)(x + y - s) = 0$$
$$f_y = s(s - x)(s - y) - s(s - x)(x + y - s) = 0$$

を解いて $(x, y) = (0, s), (s, 0), (s, s), \left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right)$ が得られる。この中に最大値を与える点が存在する。$f(0, s) = 0$，$f(s, 0) = 0$，$f(s, s) = 0$，$f\left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right) = \dfrac{s^4}{27}$ なので最大値を与える点は $(x, y) = \left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right)$ である。このとき $x = y = z = \dfrac{2s}{3}$ なので 3 角形は正 3 角形である。以上により**正 3 角形**のとき面積最大になる。

(6)　定円を点 O を中心とする半径 r の円とする。円に内接する 3 角形を ABC とする。角 $\angle AOB = s, \angle BOC = t, \angle COA = u$ とおくと $s+t+u = 2\pi$ が成立している。最大面積を求めるので，ABC は O を含んでいるとしてよい。このとき ABC が 3 角形をなす条件は $0 < s < \pi, 0 < t < \pi, 0 < u < \pi$ である。この不等式が定義する領域を D とすると $D = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s < \pi, t < \pi, s + t > \pi \right\}$ となる。

3 角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} r^2 \left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t)\right)$$

なので，$\overline{D} = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s \leq \pi, t \leq \pi, s + t \geq \pi \right\}$ 上で

$$z = f(s, t) = \frac{1}{2} r^2 \left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t)\right)$$

の最大値を求める問題になる。

$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(s, t)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

最初に境界上での関数の値を考える。$L_1 = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s = \pi, 0 \leq t \leq \pi \right\}$，
$L_2 = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq s \leq \pi, t = \pi \right\}$，$L_3 = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq s \leq \pi, s + t = \pi \right\}$ とおくと $\partial\overline{D} =$

$L_1 \cup L_2 \cup L_3$ である。L_1 上で z は

$$\begin{aligned} z = f(\pi, t) &= \frac{1}{2} r^2 (\sin \pi + \sin t + \sin(2\pi - \pi - t)) \\ &= \frac{1}{2} r^2 (\sin t + \sin(\pi - t)) \\ &= \frac{1}{2} r^2 (\sin t + \sin t) = r^2 \sin t \end{aligned}$$

となるので，L_1 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。L_2 上では

$$z = f(s, \pi) = r^2 \sin s$$

となるので，L_2 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ のときで値は $f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = r^2$ である。L_3 上では $t = \pi - s$ なので

$$\begin{aligned} z = f(s, \pi - s) &= \frac{1}{2} r^2 (\sin s + \sin(\pi - s) + \sin(2\pi - \pi)) \\ &= \frac{1}{2} r^2 (\sin s + \sin(\pi - s)) \\ &= \frac{1}{2} r^2 (\sin s + \sin s) = r^2 \sin s \end{aligned}$$

となる。L_3 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。以上により境界上での最大値は r^2 で $(s,t) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ でとることが分かる。

次に臨界点を調べる。

$$z_s = \frac{1}{2} r^2 (\cos s - \cos(2\pi - s - t)), \qquad z_t = \frac{1}{2} r^2 (\cos t - \cos(2\pi - s - t))$$

なので臨界点では $\cos s - \cos(2\pi - s - t) = 0$ かつ $\cos t - \cos(2\pi - s - t) = 0$ が成立している。これより $\cos s = \cos t$ が得られる。$0 \le s \le \pi$ かつ $0 \le t \le \pi$ であるが，この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = t$ が成立する。$t = s$ を代入して $\cos s = \cos(2\pi - 2s)$ を得る。

$\pi \le s+t \le 2\pi$ より，$\pi \le 2s \le 2\pi$ が成立している。$-2\pi \le -2s \le -\pi$，$0 \le 2\pi - 2s \le \pi$ と変形できる。この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = 2\pi - 2s$ が成立する。よって臨界点は $(s,t) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ である。

$$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 > r^2 = f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

なので f は $(s,t) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ で最大値をとる。$s = t = u = \frac{2\pi}{3}$ なので最大になる 3 角形は正 3 角形である。

(7)　定円を点 O を中心とする半径 r の円とする。円に内接する 3 角形を ABC とする。角 $\angle AOB = s, \angle BOC = t, \angle COA = u$ とおくと $s + t + u = 2\pi$ が成立している。このとき ABC が 3 角形をなす条件は $0 < s < 2\pi, 0 < t < 2\pi, 0 < u < 2\pi$ である。この不等式が定義する領域を D とすると $D = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s < 2\pi, t < 2\pi, s + t > 2\pi \right\}$ となる。

3 角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t)\right)$$

なので，D 上で

$$z = f(s,t) = \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t)\right)$$

の最小値を求める問題になる。

この問題の場合最小値は存在しない。そのことを背理法で示す。

最小値が存在するとし，最小値を与える点を (a,b) とする。即ち $(a,b)\in D$ で $m = f(a,b)$ が最小値とする。m は三角形の面積なので $m > 0$ である。

$0 < s < \pi$ とすると $2\pi - 2s > 0$ なので $(s,s)\in D$ である。m は最小値なので

$$m \leq f(s,s)$$

ここで $s\to +0$ として極限を考える。$s\to +0$ のとき $2\pi - 2s \to 2\pi$ で $y = \sin x$ は連続関数なので

$$m \leq \lim_{s\to+0} f(s,s) = \frac{1}{2}r^2\lim_{s\to+0}\big(\sin s + \sin s + \sin(2\pi - 2s)\big) = 0$$

$0 < m = 0$ より $0 < 0$ となり矛盾。よって最小値を持たない。

演習問題 ***2.38**　定理 2.35 を証明せよ。

$F_y(a,b) \neq 0$ なので $F_y(a,b) > 0$ の場合に証明する。$F_y(a,b) < 0$ の場合も同様に証明できる (各自試みよ)。$F_y(a,b) > 0$ なので (a,b) のある近傍 $U = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, d((x,y),(a,b)) < \delta\right\}$ で $(x,y)\in U$ ならば $F_y(x,y) > 0$ となるものが存在する。以下点はすべて U 内にあるとする。$F_y(a,b) > 0$ より $F(a,y)$ は y に関して単調増加である。$F(a,b) = 0$ なので y_1, y_2 が存在して，

$$y_1 < b < y_2, \qquad F(a,y_1) < F(a,b) = 0 < F(a,y_2)$$

を満たす。よって a のある近傍 $W = \{\, x\in\mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon \,\}$ が存在して

$$\forall x \in W\ ;\ F(x,y_1) < 0 < F(x,y_2)$$

を満たす。$\forall x\in W$ に対し $F(x,y)$ は y に関し単調増加なので $F(x,y) = 0$ となる y が存在する。この y を $y = f(x)$ と定義すると，$F(x,f(x)) = 0$ かつ $b = f(a)$ となっている。$x\in W$ に対し $y = f(x), k = f(x+h) - f(x)$ と置く。平均値の定理より

$$F(x+h, y+k) - F(x,y) = hF_x(x+\theta h, y+\theta k) + kF_y(x+\theta h, y+\theta k)$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。$y = f(x)$ なので,$F(x,y) = 0$，$y + k = f(x+h)$ なので，$F(x+h, y+k) = 0$ が成立する。よって

$$0 = hF_x(x+\theta h, y+\theta k) + kF_y(x+\theta h, y+\theta k)$$

が成立する。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{F_x(x+\theta h, y+\theta k)}{F_y(x+\theta h, y+\theta k)} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \end{aligned}$$

$F_y(a_1,a_2,b)\neq 0$ なので $F_y(a_1,a_2,b)>0$ の場合に証明する。$F_y(a_1,a_2,b)<0$ の場合も同様に証明できる (各自試みよ)。$F_y(a_1.a_2,b)>0$ なので (a_1,a_2,b) のある近傍

$$U=\left\{ (x_1,x_2,y)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, d((x_1,x_2,y),(a_1,a_2,b))<\delta \right\}$$

で $(x_1,x_2,y)\in U$ ならば $F_y(x_1,x_2,y)>0$ となるものが存在する。以下点はすべて U 内にあるとする。$F_y(a_1,a_2,b)>0$ より $F(a_1,a_2,y)$ は y に関して単調増加である。$F(a_1,a_2,b)=0$ なので y_1,y_2 が存在して,

$$y_1<b<y_2, \qquad F(a_1,a_2,y_1)<F(a_1,a_2,b)=0<F(a_1,a_2,y_2)$$

を満たす。よって (a_1,a_2) のある近傍 $W=\left\{ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, d((x_1,x_2),(a_1,a_2))<\varepsilon \right\}$ が存在して

$$\forall (x_1,x_2)\in W\ ;\ F(x_1,x_2,y_1)<0<F(x_1,x_2,y_2)$$

を満たす。$\forall (x_1,x_2)\in W$ に対し $F(x_1,x_2,y)$ は y に関し単調増加なので $F(x_1,x_2,y)=0$ となる y が存在する。この y を $y=f(x_1,x_2)$ と定義すると，$F(x_1,x_2,f(x_1,x_2))=0$ かつ $b=f(a_1,a_2)$ となっている。$(x_1,x_2)\in W$ に対し $y=f(x_1,x_2), k=f(x_1+h,x_2)-f(x_1,x_2)$ と置く。x_2 は固定し x_1,y に関する 2 変数関数だとみなして平均値の定理を適用すると

$$F(x_1+h,x_2,y+k)-F(x_1,x_2,y)=hF_{x_1}(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)+kF_y(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する。$y=f(x_1,x_2)$ なので,$F(x_1,x_2,y)=0$，$y+k=f(x_1+h,x_2)$ なので，$F(x_1+h,x_2,y+k)=0$ が成立する。よって

$$0=hF_{x_1}(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)+kF_y(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)$$

が成立する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,+h,x_2)-f(x_1,x_2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{F_{x_1}(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)}{F_y(x_1+\theta h,x_2,y+\theta k)}=-\frac{F_{x_1}(x_1,x_2,y)}{F_y(x_1,x_2,y)}\end{aligned}$$

変数 x_2 に関しても同様に示すことができる (各自試みよ)。

演習問題 2.39　次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $F(x,y)=1-y+xe^y=0$

(2) $F(x,y)=x^3y^3+y-x=0$

(3) $F(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$ (デカルトの正葉線)

(1)　式の両辺を x で微分すると

$$-y'+e^y+xe^yy'=0 \tag{6}$$

となる。よって

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}$$

となる。式 (6) の両辺を x で微分すると

$$-y''+2e^yy'+xe^y(y')^2+xe^yy''=0$$

となるので

$$y'' = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^3}$$

となる。

(2)　式の両辺を x で微分すると

$$3x^2y^3 + 3x^3y^2y' + y' - 1 = 0 \tag{7}$$

となる。よって

$$y' = \frac{1 - 3x^2y^3}{1 + 3x^3y^2}$$

となる。式 (7) の両辺を x で微分すると

$$6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2 + 3x^3y^2y'' + y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{6xy(9x^6y^6 + 3x^3y^4 - y^2 - 3x^4y^3 - 3xy - x^2)}{(1 + 3x^3y^2)^3}$$

となる。

(3)　式の両辺を x で微分すると

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0 \tag{8}$$

となる。よって

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

となる。式 (8) の両辺を x で微分すると

$$6x - 3y' - 3y' - 3xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0$$

となるので

$$2\left(x - y' + yy'^2\right) + (y^2 - x)y'' = 0$$

と変形する。

$$\begin{aligned}
x - y' + yy'^2 &= x + y'\left(yy' - 1\right) = x + \frac{x^2 - y}{x - y^2}\left(y\frac{x^2 - y}{x - y^2} - 1\right) \\
&= x\left(1 + \frac{(x^2 - y)(xy - 1)}{(x - y^2)^2}\right) = xy\left(\frac{x^3 - 3xy + y^3 + 1}{(x - y^2)^2}\right) \\
&= \frac{xy}{(x - y^2)^2} \qquad \text{(変形の途中で } x^3 - 3xy + y^3 = 0 \text{ を使用)}
\end{aligned}$$

なので

$$y'' = \frac{2xy}{(x - y^2)^3}$$

となる。

演習問題 2.40　$F(x, y) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 1$ とする。

(1) $F(x, y) = 0$ のとき x の動きうる範囲を求めよ。

(2) 点 $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ において，$F(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = f(x)$ について $f'(0), f''(0)$ を求めよ。

(3) 点 $\left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ において，$F(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = f(x)$ について $f'(0), f''(0)$ を求めよ。

(1)　$F(x, y) = 0$ を y に関する 2 次方程式と見る。$F(x, y) = 0$ を満たす (x, y) が存在するとき，y に関する 2 次方程式は実数解を持つので判別式は正である。よって

$$D = (-2x)^2 - 4 \cdot 3(2x^2 - 1) \geq 0$$

を解いて

$$-\sqrt{\frac{3}{5}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{5}}$$

を得る。逆に x がこの条件をみたすとき $F(x, y) = 0$ を満たす (x, y) が存在する。

(2)　$F(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると

$$4x - 2y - 2xy' + 6yy' = 0 \tag{9}$$

を得る。

f は $x = 0$ のとき $y = f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので

$$4 \cdot 0 - 2\frac{1}{\sqrt{3}} - 2 \cdot 0 \cdot f'(0) + 6\frac{1}{\sqrt{3}}f'(0) = 0$$

より $f'(0) = \dfrac{1}{3}$ となる。

式 (9) を x で微分すると

$$4 - 2y' - 2y' - 2xy'' + 6y'^2 + 6yy'' = 0$$

をえる。f は $x = 0$ のとき $y = f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$f'(0) = \dfrac{1}{3}$ なので

$$4 - 2\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} - 2 \cdot 0 \cdot f''(0) + 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6\frac{1}{\sqrt{3}}f''(0) = 0$$

より $f''(0) = -\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

(3)　$F(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると

$$4x - 2y - 2xy' + 6yy' = 0 \tag{10}$$

を得る。

f は $x = 0$ のとき $y = f(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので

$$4 \cdot 0 - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 2 \cdot 0 \cdot f'(0) + 6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)f'(0) = 0$$

より $f'(0)=\dfrac{1}{3}$ となる。

式 (10) を x で微分すると

$$4-2y'-2y'-2xy''+6y'^2+6yy''=0$$

をえる。f は $x=0$ のとき $y=f(0)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$f'(0)=\dfrac{1}{3}$ なので

$$4-2\frac{1}{3}-2\frac{1}{3}-2\cdot 0\cdot f''(0)+6\left(\frac{1}{3}\right)^2+6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)f''(0)=0$$

より $f''(0)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

演習問題 2.41　$F(x,y)$ は C^2 級で，$F(a,b)=0$，$F_y(a,b)\neq 0$ とする。(a,b) の近傍で $F(x,y)$ が定める陰関数を $y=f(x)$ とするとき次の問に答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で極小であるという条件「$f'(a)=0, f''(a)>0$」を $F(x,y)$ に関する条件に直せ。

(2) 関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で極大であるという条件「$f'(a)=0, f''(a)<0$」を $F(x,y)$ に関する条件に直せ。

$z=G(x,y)$ と $y=g(x)$ から $z=G(x,g(x))$ を合成し，これを x で微分した $\dfrac{dz}{dx}$ は $z=G(x,y)$ と $x=x, y=g(x)$ の合成と考えて 2 変数の合成関数の微分法を用いると

$$\frac{dz}{dx}=G_x+G_yg'(x) \tag{11}$$

となる。

よって $F(x,f(x))=0$ の両辺を x で微分すると

$$F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))f'(x)=0 \tag{12}$$

が得られる。式 (12) の両辺をさらに x で微分すると

$$\begin{aligned}&(F_x)_x(x,f(x))+(F_x)_y(x,f(x))f'(x)\\&\quad+\Big((F_y)_x(x,f(x))+(F_y)_y(x,f(x))f'(x)\Big)f'(x)+F_y(x,f(x))f''(x)=0\end{aligned}$$

となる。$F_{xy}=F_{yx}$ を用いると

$$F_{xx}+2F_{xy}f'(x)+F_{yy}\left(f'(x)\right)^2+F_yf''(x)=0 \tag{13}$$

(1)　$x=a$ を式 (12) に代入すると

$$F_x(a,f(a))+F_y(a,f(a))f'(a)=0$$

なので $f'(a)=0$ という条件は $F_x(a,f(a))=0$ という条件になる。また $x=a$ を式 (13) に代入し，$f'(a)=0$ を用いると

$$F_{xx}(a,f(a))+F_y(a,f(a))f''(a)=0$$

となる。『$B \neq 0$ のとき $\dfrac{A}{B} > 0 \iff AB > 0$』なので $f''(a) > 0$ という条件は

$$F_{xx}(a, f(a))F_y(a, f(a)) < 0$$

という条件となる。よって $b = f(a)$ とすると

$$f'(a) = 0,\ f''(a) > 0 \iff F_x(a, b) = 0,\ F_{xx}(a, b)F_y(a, b) < 0$$

である。
(2)　(1) と同様に考えると

$$f'(a) = 0,\ f''(a) < 0 \iff F_x(a, b) = 0,\ F_{xx}(a, b)F_y(a, b) > 0$$

となる。

演習問題 2.42　次の式が与えられているとき，x, y を独立変数，z を従属変数と見て，z_x, z_y, z_{xy} を求めよ。
(1) $1 + x + y + z + xyz = 0$
(2) $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = 1$

(1)　与式を x で微分すると

$$1 + z_x + yz + xyz_x = 0 \tag{14}$$

となる。これより $z_x = -\dfrac{1 + yz}{1 + xy}$ を得る。与式を y で微分すると

$$1 + z_y + xz + xyz_y = 0$$

となる。これより $z_y = -\dfrac{1 + xz}{1 + xy}$ を得る。
　式 (14) を y で微分すると

$$z_{xy} + z + yz_y + xz_x + xyz_{xy} = 0$$

となる。これより

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{x + y + xyz - z}{(1 + xy)^2} \\ &= \frac{-2z - 1}{(1 + xy)^2} \end{aligned}$$

を得る。
(2)　与式を x で微分すると

$$2x + 2y + 2zz_x = 0 \tag{15}$$

となる。これより $z_x = -\dfrac{x + y}{z}$ を得る。与式を y で微分すると

$$2x + 2y + 2zz_y = 0$$

となる。これより $z_y = -\dfrac{x+y}{z}$ を得る。

式 (15) を y で微分すると

$$1 + z_y z_x + z z_{xy} = 0$$

となる。

$$\begin{aligned} z z_{xy} &= -\left(1 + z_y z_x\right) = -\left(1 + \frac{x+y}{z}\frac{x+y}{z}\right) \\ &= -\frac{x^2 + 2xy + y^2 + z^2}{z^2} = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

より $z_{xy} = -\dfrac{1}{z^3}$ を得る。